

בגרוּפּ

למידה חברתית לבגרות

שאלון 382 (803)

מורה למתמטיקה: רות הלפנבאום

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

16/04/2019

עורכי המצגת: רן סודאי ורות הלפנבאום

נוסחאות – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

נגזרות:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \text{ שלם})$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

נגזרת של מכפלת פונקציות:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

$$(n \neq -1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

אינטגרלים:

מה בתכנית?

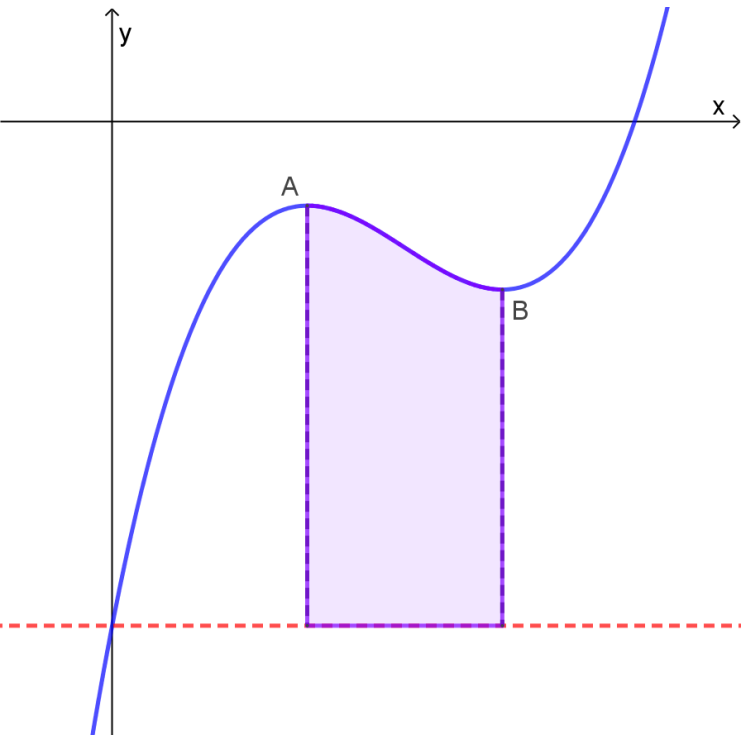
- בגרות קיץ תשע"ח מועד א'
- בגרות קיץ תשע"ז מועד ב'

מה בתכנית?

- בגרות קיץ תשע"ח מועד א'

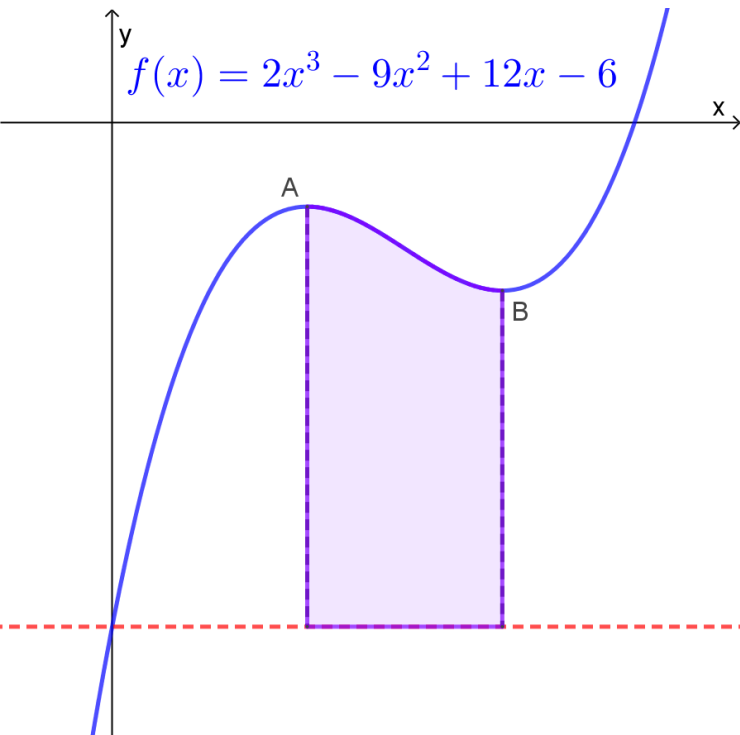
- בגרות קיץ תשע"ז מועד ב'

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב'



- בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$
- דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y העבירו ישר המקביל לציר ה-x.
 - א- מצא את משוואת הישר המקביל.
- A ו-B הן נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ כמתואר בציור.
 - ב- מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
- דרך הנקודות A ו-B העבירו אנכים לישר המקביל (ראה ציור).
 - ג- חשב את השטח המסומן בציור:
השטח המוגבל על ידי הפונקציה $f(x)$
על ידי האנכים שהעבירו,
ועל ידי הישר המקביל לציר ה-x.

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב'



- בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$
- דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y העבירו ישר המקביל לציר ה-x.
- א- מצא את משוואת הישר המקביל.

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב'

נציב $x=0$ בפונקציה

קבוע $y =$

$y = f(0)$

• דרך נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y

• העבירו ישר המקביל לציר ה- x

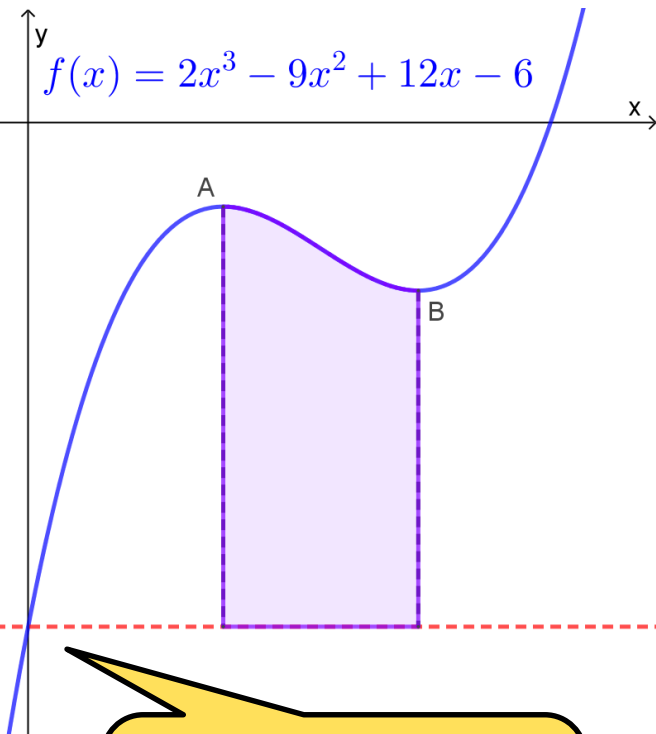
• ואנו נדרשים למצוא את משוואתו.

• כדי למצוא את נק' החיתוך עם ציר ה- y נציב $x=0$ במשוואת הפונקציה:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

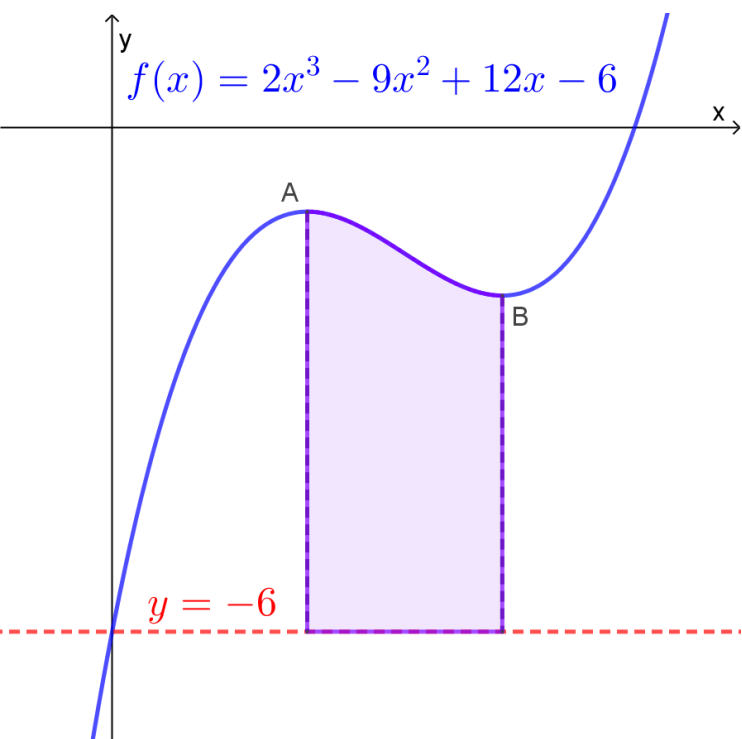
$$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 - 6 \rightarrow f(x) = -6$$

• הישר מקביל לציר ה- x ולכן משוואתו תהיה: $y = -6$.



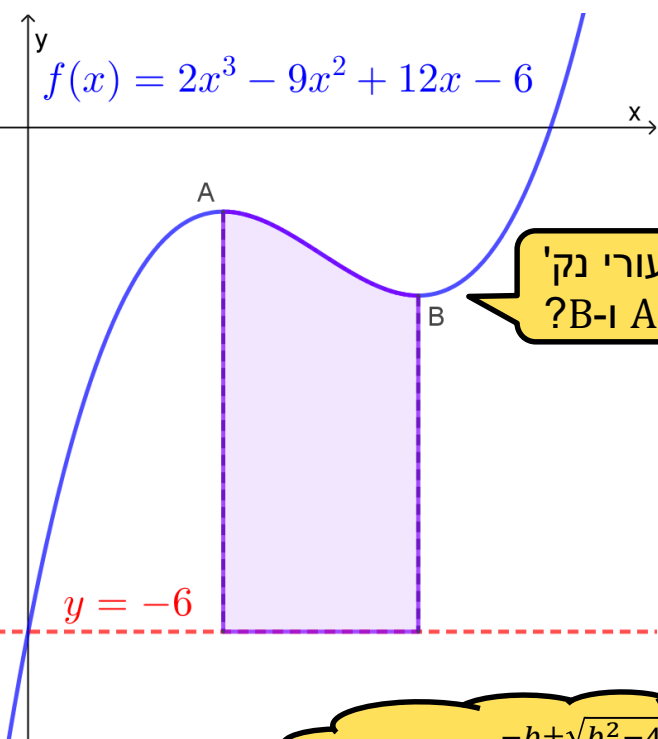
מה משוואת הישר המקביל לציר ה- x שעובר דרך נק' החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y ?

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב'



- בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$
- A ו-B הן נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ כמתואר בציור.
- מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב'



• בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

$$f'(x) = 0$$

• A ו-B הן נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ כמתואר בציור. •••

ב- מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

• כדי למצוא את שיעורי ה- x של נק' הקיצון נגזור ואת הפונקציה ונפתור $f'(x) = 0$:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

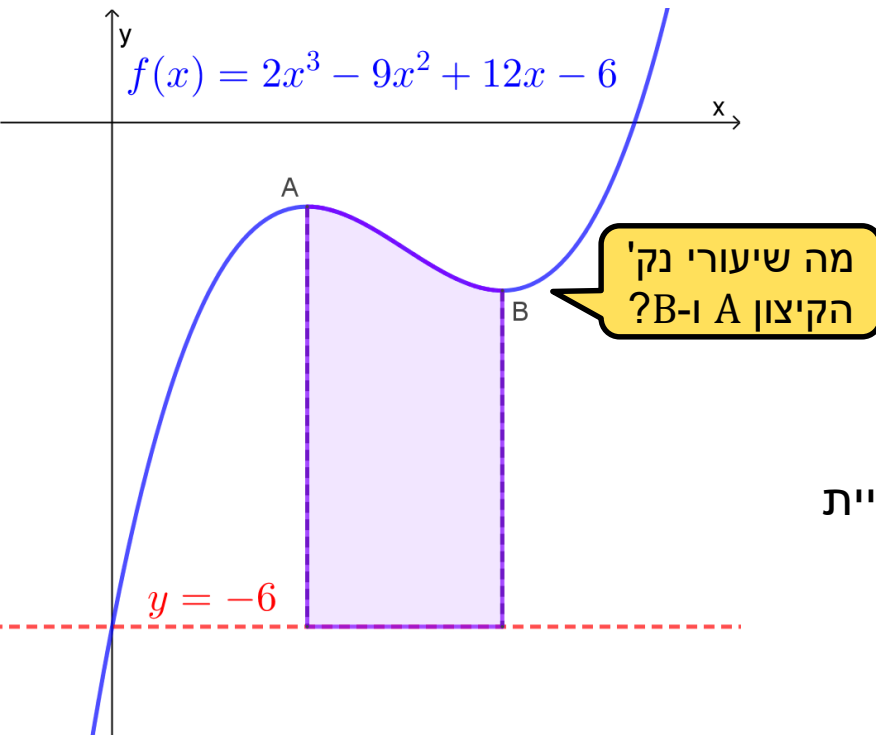
$$\Rightarrow a = 1, b = -3, c = 2$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_A = \frac{3-1}{2} = 1, x_B = \frac{3+1}{2} = 2 \Rightarrow f'(x) = 6(x-1)(x-2)$$

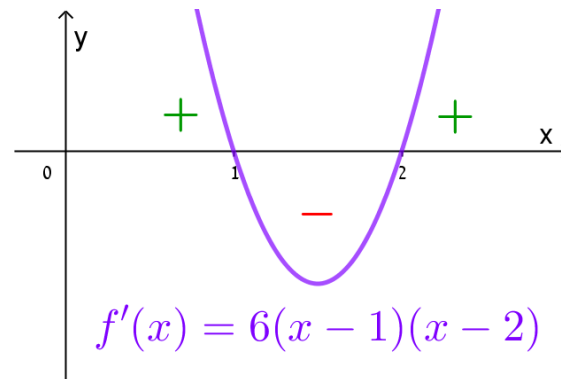
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב'



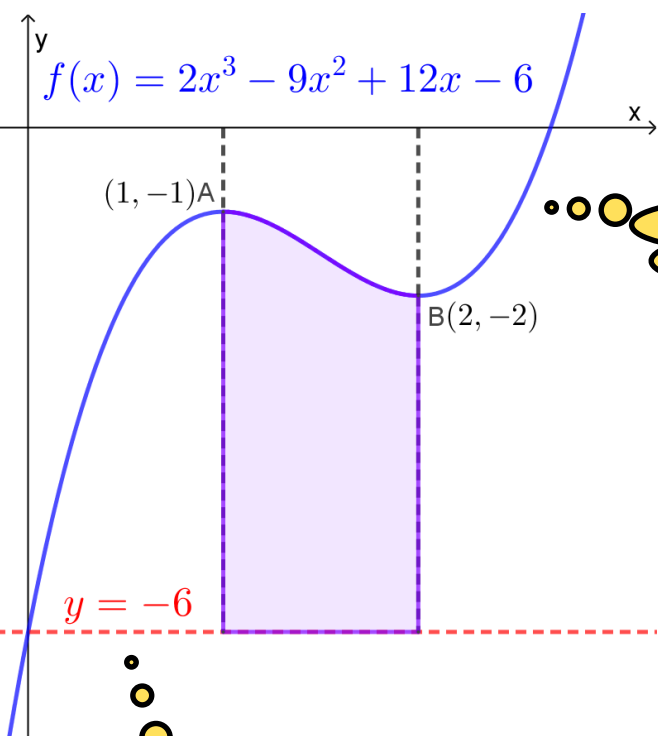
- כדי למצוא את שיעורי ה-y של הנקודות A ו-B נציב $x=1$ ו- $x=2$ במשוואת הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$
 - נק' A: $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 6 \Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow A(1, -1)$
 - נק' B: $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 6 \Rightarrow f(2) = -2 \Rightarrow B(2, -2)$
 - בגלל שנתון גרף הפונקציה, ניתן לסווג את הנקודות לפי הגרף.
- אם לא היה נתון גרף, ניתן היה לסווג אותן לפי תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית

הנגזרת הראשונה: $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$



- ב- $x=1$ הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות ולכן הפונקציה עוברת מעליה לירידה כלומר יש לפונקציה נק' מקסימום ב- $x=1$.
- ב- $x=2$ הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות ולכן הפונקציה עוברת מירידה לעליה כלומר יש לפונקציה נק' מינימום ב- $x=2$.

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב'



• דרך הנקודות A ו-B העבירו אנכים לישר המקביל (ראה ציור).

ג- חשב את השטח המסומן בציור:

השטח המוגבל על ידי הפונקציה $f(x)$,

על ידי האנכים שהעבירו, ועל ידי הישר המקביל לציר ה-x.

• דרך א': ישירות: $S = \int_1^2 (f(x) - y) dx$

נציב:
$$S = \int_1^2 ((2x^3 - 9x^2 + 12x - 6) - (-6)) dx = \int_1^2 (2x^3 - 9x^2 + 12x) dx$$

נקבל:
$$S = \int_1^2 (2x^3 - 9x^2 + 12x) dx = \left[2 \cdot \frac{x^4}{4} - 9 \cdot \frac{x^3}{3} + 12 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

נצמצם ונציב:
$$S = \left[\frac{x^4}{2} - 3 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 \right]_1^2 = \left[\frac{2^4}{2} - 3 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{1^4}{2} - 3 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 \right]$$

נקבל:
$$S = [8] - [3.5] = 4.5$$

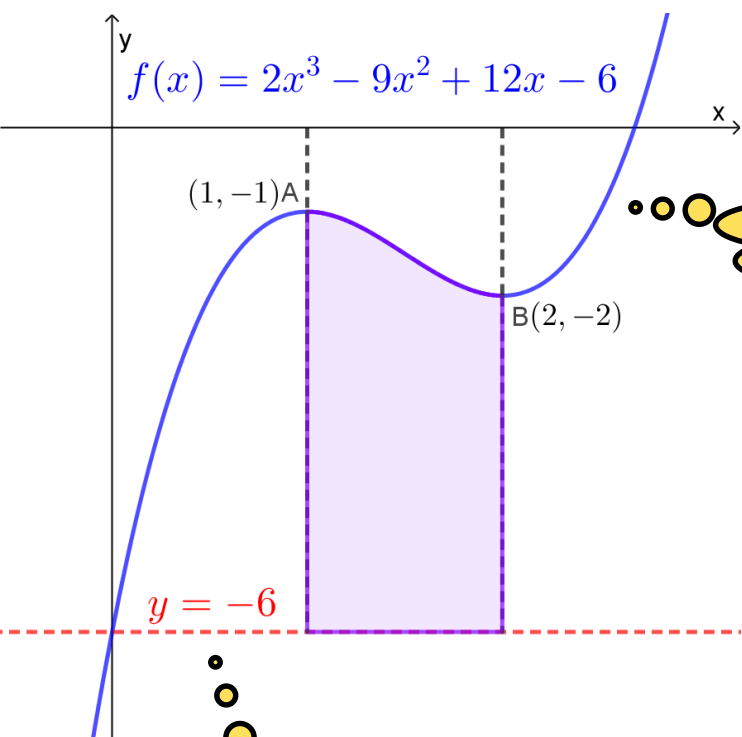
פונקציה עליונה:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

פונקציה תחתונה:

$$y = -6$$

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב'



• דרך הנקודות A ו-B העבירו אנכים לישר המקביל (ראה ציור).

ג- חשב את השטח המסומן בציור:

השטח המוגבל על ידי הפונקציה $f(x)$,

על ידי האנכים שהעבירו, ועל ידי הישר המקביל לציר ה-x.

• דרך ב': חיסור שטחים: שטח המלבן הגדול פחות השטח הכלוא בין הפונקציה לציר ה-x.

• שטח המלבן: $S_{\square} = 6 \cdot 1 = 6$

• השטח הכלוא בין הפונקציה לציר ה-x: $S_f = \int_1^2 (0 - f(x)) dx$

$$\text{נציב: } S_f = \int_1^2 (-2x^3 + 9x^2 - 12x + 6) dx$$

$$\text{נקבל: } S_f = \left[-2 \cdot \frac{x^4}{4} + 9 \cdot \frac{x^3}{3} - 12 \cdot \frac{x^2}{2} + 6x \right]_1^2 = \left[-\frac{x^4}{2} + 3 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 6x \right]_1^2$$

$$\text{נציב: } S_f = \left[-\frac{2^4}{2} + 3 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{1^4}{2} + 3 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 \right] = [4] - [2.5] = 1.5$$

$$\text{נקבל: } S = S_{\square} - S_f = 6 - 1.5 = 4.5$$

פונקציה עליונה:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

פונקציה תחתונה:

$$y = -6$$

מה בתכנית?

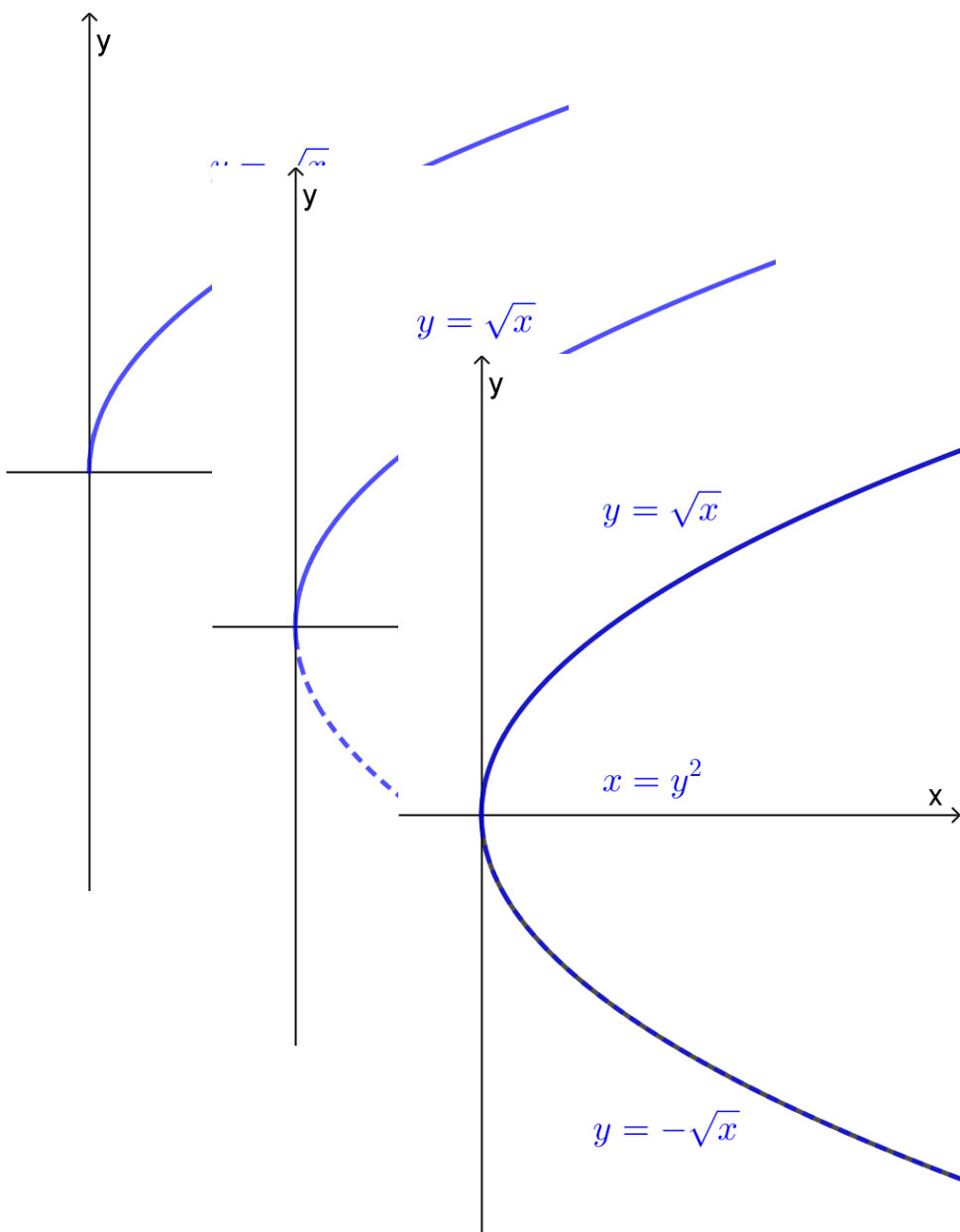
- בגרות קיץ תשע"ח מועד א'

- בגרות קיץ תשע"ז מועד ב'

בגרות קיץ תשע"ז מועד ב'

- נתונה הפונקציה $f(x) = 3x - 6\sqrt{x} + 7$.
- א מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב מצא את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
- ג רשום את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ד מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .
- ה שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ו האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x ? נמק.

בגרות קיץ תשע"ז מועד ב'



• נתונה הפונקציה $f(x) = 3x - 6\sqrt{x} + 7$.

א- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

• הגורם היחיד בפונקציה $f(x)$ שיש לו הגבלה על תחום ההגדרה הוא \sqrt{x} .

• תחום ההגדרה של פונקציית השורש הוא מה שמתחת לסימן השורש

יהיה אי-שלילי אם אנו מגבילים עצמינו למספרים ממשיים.

• נקבל: $0 \leq x$

תחום הגדרה:

$$x \neq 0$$

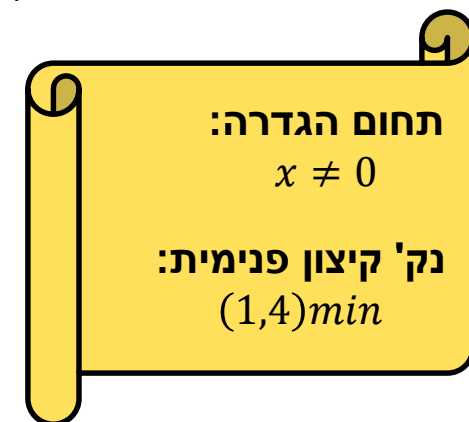
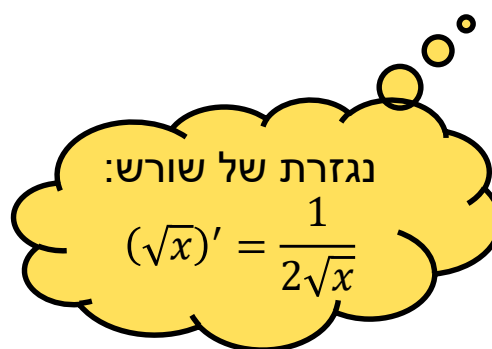
בגרות קיץ תשע"ז מועד ב'

- נגזור: $f'(x) = 3 - 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3 - \frac{3}{\sqrt{x}} = 3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
- נפתור: $f'(x) = 0 \Rightarrow 3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x = 1$
- נבדוק מה שיעור ה-y: $f(1) = 3 \cdot 1 - 6 \cdot \sqrt{1} + 7 = 4$
- קיבלנו נקודה חשודה כקיצון: (1,4). נבדוק בעזרת טבלה:

x	0	$x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	max	↘	min	↗

- מסקנה: (1,4) נק' מינימום פנימית.

- נתונה הפונקציה $f(x) = 3x - 6\sqrt{x} + 7$.
- מצא את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
- נשים לב שכתבו "נקודת קיצון פנימית", כלומר רמזו לנו שיש רק אחת כזו.
- נקודת קיצון שאינה פנימית תהיה לנו בקצות התחום, במקרה שלנו ב- $x=0$.
- כדי למצוא את נקודת הקיצון הפנימית נבדוק מתי פונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$ מתאפסת.



בגרות קיץ תשע"ז מועד ב'

- נתונה הפונקציה $f(x) = 3x - 6\sqrt{x} + 7$.
- תחום ירידה: $0 < x < 1$
- תחום עליה: $1 < x$
- רשום את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

- את תחומי העליה והירידה של הפונקציה נקבל מתוך הטבלה:

x	0	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	max	↘	min	↗

ירידה

עליה

תחום הגדרה: $x \neq 0$	תחום ירידה: $0 < x < 1$
נק' קיצון פנימית: $(1,4)_{min}$	תחום עליה: $1 < x$

בגרות קיץ תשע"ז מועד ב'

- כדי למצוא את נק' החיתוך עם ציר ה- y נציב $x=0$ בפונקציה:

$$f(x) = 3x - 6\sqrt{x} + 7$$

$$f(0) = 3 \cdot 0 - 6\sqrt{0} + 7 = 7$$

- קיבלנו: $(0,7)$ נק' חיתוך עם ציר ה- y .
- נק' זו היא נק' קיצון קצה מסוג מקסימום, כיוון שממנה הפונקציה יורדת.

- נתונה הפונקציה $f(x) = 3x - 6\sqrt{x} + 7$.

ד- מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

x	0	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	max	↘	min	↗

נק' חיתוך עם ציר y :
 $(0,7)$

זו נק' קיצון קצה

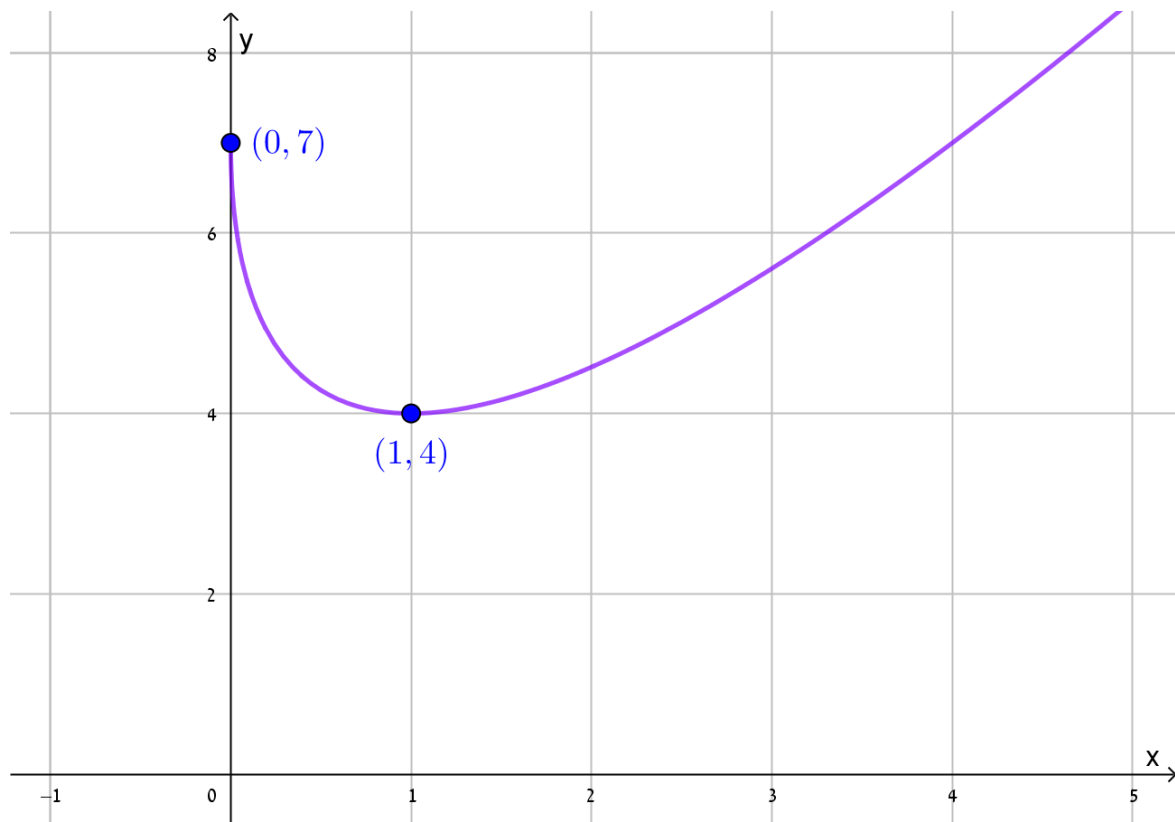
תחום ירידה:
 $0 < x < 1$

תחום עליה:
 $1 < x$

תחום הגדרה:
 $x \neq 0$

נק' קיצון פנימית:
 $(1,4)_{min}$

בגרות קיץ תשע"ז מועד ב'



• נתונה הפונקציה $f(x) = 3x - 6\sqrt{x} + 7$.

ה- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נק' חיתוך עם ציר y:
 $(0,7)$

תחום ירידה:
 $0 < x < 1$

תחום הגדרה:
 $x \neq 0$

זו נק' קיצון קצה

תחום עליה:
 $1 < x$

נק' קיצון פנימית:
 $(1,4)_{min}$

אז מה היה לנו פה?

- הזזות ומתיחות של פונקציה: $g(x) = a \cdot f(mx - p) + k$
- $g(x)$ מתקבלת מ- $f(x)$ על ידי:
 - ❖ הזזה k יחידות מעלה.
 - ❖ הזזה $\frac{p}{m}$ יחידות ימינה.
 - ❖ כיווץ אופקי פי m .
 - ❖ מתיחה אנכית פי a .

$h(x) = \frac{1}{f(x)}$	$f(x)$
תחום עליה (ירידה)	תחום עליה (ירידה)
נק' מינימום (מקסימום)	נק' מקסימום (מינימום)
אסימפטוטות אנכיות	נק' אפס / חורים בגובה אפס
נק' אפס / חורים בגובה אפס	אסימפטוטות אנכיות
שאיפה לאינסוף / מינוס אינסוף	אסימפטוטה אופקית $y = 0$
אסימפטוטה אופקית $y = \frac{1}{k}$	אסימפטוטה אופקית $y = k \neq 0$
תחום חיוביות (שליליות)	תחום חיוביות (שליליות)

- פונקציה זוגית: $f(-x) = f(x)$
פונקציה שסימטרית ביחס לציר ה- y .
- פונקציה אי זוגית: $f(-x) = -f(x)$
פונקציה שערכיה בתחום $0 \leq x$ משוקפים הן ביחס לציר ה- y והן ביחס לציר ה- x .
- מתקיים:
אם פונקציה היא זוגית,
אז פונקציית הנגזרת הראשונה שלה תהיה אי זוגית.
וההפך:
אם הפונקציה אי זוגית,
אז פונקציית הנגזרת הראשונה שלה תהיה זוגית.
- יישומון גיאוגברה הממחיש הזזות, מתיחות ומניפולציות נוספות על

תודה!