בגרופ

למידה חברתית לבגרות

שאלון 581 (806)

סדרות

10/04/2019

סדרות

סדרות:	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה:	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$
איבר n-י:	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום:	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

<u>בגרות 806 - קיץ תש"ע- מועד ב' 14.7.10</u>

שאלה 2 – סדרה חשבונית – עם פרמטרים

שאלה 1 בגרות 806 - קיץ תש"ע - מועד ב'

a_n ו - a_k הם שני איברים בסדרה חשבונית במקום ה- n ובמקום ה- K בהתאמה .

הפרש הסדרה הוא d , והאיבר הראשון בסדרה הוא $a_1=md$

m - מספר טבעי , $d \neq 0$.

א. (1) הראה כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$

(2) הבע באמצעות n , k , ו - m את המקום בסדרה של איבר השווה לסכום של שני האיברים a_n ו - a_k .

ב. (1) הבע באמצעות a_1 , d ו- m את הסכום $a_{34} + a_{65}$

(2) נתון : $a_{34} + a_{65} = a_{109}$

סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900 .

מצא את a_1 ו – d .

שאלה 1 דיון סעיף א' (1)

$a_n = a_1 + (n-1)d$

הפרש הסדרה הוא d , והאיבר הראשון בסדרה הוא $a_1=md$

m - מספר טבעי , $d \neq 0$.

א. (1) הראה כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$

שאלה 1 פתרון - סעיף א' (1)

a_n ו - a_k הם שני איברים בסדרה חשבונית במקום ה- n ובמקום ה- K בהתאמה .

הפרש הסדרה הוא d , והאיבר הראשון בסדרה הוא $a_1=md$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

m - מספר טבעי , $d \neq 0$.

א. (1) הראה כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$

$$a_n + a_k = \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n} + \underbrace{a_1 + (k-1)d}_{a_k} = a_1 + a_1 + (n-1)d + (k-1)d =$$

$$a_1 + \underbrace{md}_{a_1} + (n-1)d + (k-1)d =$$

$$a_1 + d(m+n-1+k-1) =$$

$$a_1 + d(n+k+m-2)$$

הראנו שמתקיים : $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$

שאלה 1 דיון סעיף א' (2)

$a_n = a_1 + (n-1)d$

א. (1) הראנו כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$

(2) הבע באמצעות n , k , ו - m את המקום בסדרה של איבר השווה לסכום של שני האיברים a_n ו - a_k .

שאלה 1 פתרון סעיף א' (2)

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

א. (1) הראנו כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$

(2) הבע באמצעות n, k ו- m את המקום בסדרה של איבר השווה לסכום של שני האיברים a_n ו- a_k .

אנו מחפשים t כך שיתקיים :

$$a_n + a_k = a_t$$

1 2 3

מסעיף א' (1)

איבר כללי בסדרה חשבונית

$$a_1 + d(n+k+m-2) = a_1 + d(t-1)$$

$$n+k+m-2 = t-1$$

$$n+k+m-1 = t$$

המקום בסדרה של איבר השווה לסכום של שני האיברים a_n ו- a_k הוא: $n+k+m-1$

שאלה 1 דיון - סעיף ב' (1)

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_1 = md$

א. (1) הראנו כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$

ב. (1) הבע באמצעות a_1 , d ו- m את הסכום $a_{34} + a_{65}$

שאלה 1 רמזים - סעיף ב' (1)

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$ $\boxed{a_1=md}$

א. (1) הראנו כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$

ב. (1) הבע באמצעות a_1 , d ו- m את הסכום $a_{34} + a_{65}$

נציב n=34 , k=65

$$a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$$

$$a_{34} + a_{65} = a_1 + d(34+65+m-2) = a_1 + d(m+97)$$

$$\boxed{a_{34} + a_{65} = a_1 + d(m+97)}$$

שאלה 1 דיון - סעיף ב' (2)

ב. (1) הראנו כי מתקיים $a_{34}+a_{65}=a_1+d(m+97)$

נתון : $a_1=md$

ב. (2) נתון : $a_{34}+a_{65}=a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900 .

מצא את a_1 ו – d .

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$$

נוסחה שרגילים לה

$$S_n=\frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$$

בדף הנוסחאות

שאלה 1 רמזים - סעיף ב' (2)

ב. (1) הראנו כי מתקיים $a_{34}+a_{65}=a_1+d(m+97)$ נתון : a_1=md

ב. (2) נתון : $a_{34} + a_{65} = a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900 .

מצא את a_1 ו – d .

נפתור סעיף זה בלי קשר לסעיף ב (1)

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$$

נוסחה שרגילים לה

$$S_n=\frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$$

בדף הנוסחאות

נתאר את הנתונים באמצעות a_1 ו - d

$$(1)\quad a_{34}+a_{65}=a_{109}$$

$$\underbrace{a_1+33d}_{a_{34}}+\underbrace{a_1+64d}_{a_{65}}=\underbrace{a_1+108d}_{a_{109}} \quad\Rightarrow\quad a_1+97d=108d \Rightarrow \quad (1)\ \ a_1=11d$$

המשך

שאלה 1 רמזים - סעיף ב' (2)

נתון : $a_1=md$

ב. (1) הראנו כי מתקיים $a_{34}+a_{65}=a_1+d(m+97)$

ב. (2) נתון : $a_{34} + a_{65} = a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900.

מצא את a_1 ו d – .

נפתור סעיף זה בלי קשר לסעיף ב (1)

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$$

נוסחה שרגילים לה

$$S_n=\frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$$

בדף הנוסחאות

מהשקף הקודם $(1)\ \ a_1=11d$

$$(2)\,S_{79}=7900\ \Rightarrow\frac{79}{2}\left[2\cdot a_1+(79-1)d\right]=7900$$

$$\Rightarrow\frac{79}{2}\left(2\cdot a_1+78d\right)=7900$$

$$\Rightarrow\frac{79\cdot 2}{2}\left(a_1+39d\right)=7900\ \ /:79$$

$$\Rightarrow\ (2)\quad a_1+39d=100$$

$$\begin{cases}(1)\ \ a_1=11d\\(2)\quad a_1+39d=100\end{cases}$$

$$(2)\quad \underbrace{11d}_{a_1}+39d=100$$

$$50d=100$$

$$d=2\longrightarrow(1)\ \ a_1=11d=11\cdot 2=22$$

$a_1 = 22$, $d = 2$

דרך נוספת

ב. (1) הראנו כי מתקיים $a_{34}+a_{65}=a_1+d(m+97)$ נתון : $a_1=md$

ב. (2) נתון : $a_{34}+a_{65}=a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900 .

מצא את a_1 ו – d .

נתון: $a_{34}+a_{65}=a_{109}=a_1+(109-1)d=a_1+108d$

מסעיף ב' (1) $a_{34}+a_{65}=a_1+d(m+97)$

$$a_1+d(m+97)=a_1+108d \Rightarrow$$

$$d(m+97)=108d \quad /:d$$

$$m+97=108 \Rightarrow$$

$$m=11$$

$$\boxed{a_1=md=11d}$$

שאלה 1 המשך דיון – דרך נוספת- סעיף ב' (2)

בשקף הקודם הראנו : $m = 11$ ← $a_1 = md = 11d$

ב. (2) נתון : $a_{34} + a_{65} = a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7,900 .

מצא את a_1 ו – d .

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

בדף הנוסחאות

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

נוסחה שרגילים לה

שאלה 1 פתרון – דרך נוספת - סעיף ב' (2)

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

הראנו כבר כי : $m = 11$ ← $\boxed{a_1 = md = 11d}$

ב. (2) נתון : $a_{109} = a_{65} + a_{34}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900 .

מצא את a_1 ו – d .

$$S_{79} = 7900 \Rightarrow \frac{79}{2}(2 \cdot 11d + 78d) \Rightarrow$$

$$7900 = \frac{79}{2} \cdot 100d \quad / \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 7900 \cdot 2 = 7900d \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 2}$$

$$\boxed{a_1 = 11d = 22}$$

$a_1 = 22$, $d = 2$

טיפ !

אם לא הצלחתם להוכיח טענה שנדרשה בסעיפים הראשונים,

עדיין אפשר להשתמש בטענה כאילו היה זה נתון עבור הסעיפים הבאים

בגרות 806 - חורף תשע"ג

שאלה 2 ב'– סדרה חשבונית

שאלה 2* בגרות חורף תשע"ג

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$(1)\ S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$

$(2)\ S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: 58 , 62 , 66 , ... , (4n+6)

הבע את סכום הסדרה באמצעות n (n >12)

*

שאלה 2* בגרות חורף תשע"ג

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: 58 , 62 , 66 , ... , (4n+6)

נסמן את מספר האיברים בסדרה ב - K

שאלה 2* בגרות חורף תשע"ג

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: 58 , 62 , 66 , ... , (4n+6)

נסמן את מספר האיברים בסדרה ב - K

לפי הנתון : $a_1 = 58 \quad , \ d = 4$

לפי הנוסחה לאיבר כללי בסדרה חשבונית : $(1) \ a_k = 58 + 4(k-1)$

לפי הנתון : $(2) \ a_k = 4n - 6$

$$58 + 4(k-1) = 4n + 6$$

$$58 + 4k - 4 = 4n + 6$$

$$54 + 4k = 4n + 6$$

$$4k = 4n - 48 \quad / : 4$$

$$k = n - 12$$

מספר האיברים בסדרה : n - 12

שאלה 2*

בגרות חורף תשע"ג

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$(1)\ S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

$$(2)\ S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: (4n+6) , ... , 66 , 62 , 58

מצאנו כי מספר האיברים בסדרה הוא : n - 12

הבע את סכום הסדרה באמצעות n (n >12)

שאלה 2* בגרות חורף תשע"ג

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$(1)\ S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

$$(2)\ S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: 58 , 62 , 66 , ... , (4n+6)

מצאנו כי מספר האיברים בסדרה הוא : n - 12

הבע את סכום הסדרה באמצעות n (n >12)

ניעזר בנוסחה : $(1)\ S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$

$$S_k = \frac{k}{2}\left[a_1 + a_k\right] = \frac{(n-12)}{2}\left[58 + \underbrace{4n+6}_{a_k}\right] = \frac{(n-12)(4n+64)}{2} = \frac{(n-12)2(2n+32)}{2} \Rightarrow$$

$$S_k = (n-12)(2n+32)$$

סכום הסדרה : $S_k = (n-12)(2n+32)$

בגרות קיץ תשע"ג מועד א'

21.5.13

שאלה 2 – סדרה חשבונית - סכום – מעניינת

שאלה 2 **בגרות קיץ תשע"ג מועד א'**

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :

$$S_n = n^2 - 5n + [\ 2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2)\ ]$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה , שערך כל אחד מהם קטן מ- 102 .

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה

(לאו דווקא הסכום של כל האיברים)

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :

$$S_n = n^2 - 5n + [\ 2 + 6 + 10 + ... + (4n-2)\ ]$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

נתאר את הסכום :

$$S^* = 2 + 6 + 10 + ... + (4n-2)$$

*

שאלה 2 דיון – סעיף א'

נתאר את הסכום :

$$S^* = 2+6+10+....+(4n-2)$$

כמה איברים יש בסדרה ?

שאלה 2 מציאת מס' האיברים בסכום S*

נתאר את הסכום :
$$S^* = 2+6+10+....+(4n-2)$$

S* סכום סדרה חשבונית כך ש:
$$b_1 = 2 \ , \ d = 4 \ , \ b_k = (4n-2)$$

נמצא את K – נתאר אותו באמצעות n

$$a_k = 2+(k-1)4 = (4n-2) \Rightarrow 2+4k-4 = 4n-2 \Rightarrow 4k-2 = 4n-2 \Rightarrow k = n$$

בסדרה S* יש n איברים

שאלה 2 דיון – חישוב הסכום S* - סעיף א'

$$S^* = 2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2)$$

$$b_1 = 2 \ , \ d = 4 \ , \ b_k = (4n-2) \ , k = n$$

נתאר את S* בעזרת n

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

בדף הנוסחאות

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

נוסחה שרגילים לה

שאלה 2 פתרון – חישוב הסכום S^* - סעיף א'

$$S^* = 2+6+10+....+(4n-2)$$

$$b_1 = 2 \;,\; d = 4 \;,\; b_k = (4n-2) \;,\; k = n$$

נתאר את S^* בעזרת n

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

בדף הנוסחאות

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

נוסחה שרגילים לה

$$S^* = (b_1 + b_n) \cdot \frac{n}{2} = (2+4n-2) \cdot \frac{n}{2} = 4n \cdot \frac{n}{2} = 2n^2$$

$$S^* = 2n^2$$

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :

$$S_n = n^2 - 5n + [\underbrace{2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2)}_{S^*}]$$

$$S^* = 2n^2$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

שאלה 2 תיאור Sn – סעיף א'

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :

$$S_n = n^2 - 5n + [\underbrace{2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2)}_{S^*}]$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

$$S^* = 2n^2$$

$$S_n = n^2 - 5n + [2 + 6 + 10 + \dots\dots + (4n-2)] = n^2 - 5n + 2n^2 = 3n^2 - 5n$$

$$S_n = 3n^2 - 5n$$

שאלה 2 המשך דיון – סעיף א'

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :

$$S_n = 3n^2 - 5n$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

שאלה 2   כלל חשוב

בכל סדרה מתקיים :

$$S_n = \overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1}}^{S_{n-1}} + a_n$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$$

שאלה 2 המשך דיון – סעיף א'

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :

$$S_n = 3n^2 - 5n$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

$$\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$$

שאלה 2 פתרון – סעיף א'

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא : $S_n = 3n^2 - 5n$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

$$\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \underbrace{3n^2 - 5n}_{S_n} - \underbrace{\left[3(n-1)^2 - 5(n-1)\right]}_{S_{n-1}} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{a_n = 6n - 8}$$

נוסחה לאיבר הכללי a_n : $a_n = 6n - 8$

שאלה 2 דיון – סעיף ב'

מסעיף א' : $a_n = 6n - 8$

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה , שערך כל אחד מהם קטן מ- 102 .

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה

(לאו דווקא הסכום של כל האיברים)

עלינו לברר איזו סוג סדרה זו

שאלה 2 הוכחה שהסדרה a_n היא סדרה חשבונית – סעיף ב'

מסעיף א' $\boxed{a_n = 6n - 8}$

* נוכיח כי זו סדרה חשבונית

כדי להוכיח שסדרה היא חשבונית יש להראות ש: $a_{n+1} - a_n = \text{קבוע}$

$$a_{n+1} - a_n = \underbrace{6(n+1) - 8}_{a_{n+1}} - (\underbrace{6n - 8}_{a_n}) = 6 \Rightarrow \boxed{d = 6}$$ קבוע

$$a_n = 6n - 8 \Rightarrow a_1 = 6 \cdot 1 - 8 \Rightarrow a_1 = -2$$

הסדרה היא סדרה חשבונית עם איבר ראשון $a_1 = -2$ והפרש $d = 6$

שאלה 2 המשך דיון – סעיף ב'

הסדרה $a_n = 6n - 8$ היא סדרה חשבונית עם איבר ראשון $a_1 = -2$ והפרש $d = 6$

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה , שערך כל אחד מהם קטן מ- 102 .

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה

(לאו דווקא הסכום של כל האיברים)

מיהם האיברים שקטנים מ-102 ??

שאלה 2 זיהוי האיברים הקטנים מ- 102

הסדרה $a_n = 6n - 8$ היא סדרה חשבונית עם איבר ראשון $a_1 = -2$ והפרש $d = 6$

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה , שערך כל אחד מהם קטן מ- 102 .

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה

(לאו דווקא הסכום של כל האיברים)

נבדוק מי האיבר הכי קרוב ל- 102 :

$$a_n = 6n - 8 = 102$$

$$6n = 110$$

$$n = 18.33$$

$$a_{18} = 6 \cdot 18 - 8 = 100$$

הסדרה היא : -2 ,4 , 10 , ... ,100

שאלה 2 המשך דיון – סעיף ב'

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה , שערך כל אחד מהם קטן מ- 102 .

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה

(לאו דווקא הסכום של כל האיברים)

הסדרה היא : -2 ,4 , 10 , ... ,100

$$d = 6$$

$$n = 18$$

$$a_{18} = 100$$

מופיעה בדף הנוסחאות

$$(1)\ S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$(2)\ S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

נוסחה נוחה לשימוש

*

שאלה 2 המשך דיון – סעיף ב'

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה

(לאו דווקא הסכום של כל האיברים)

הסדרה היא : 100, ... , 10 , 4, -2

a_{18}

מופיעה בדף הנוסחאות

$$(1)\ S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$(2)\ S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

נוסחה נוחה לשימוש

שאלה 2 פתרון – סעיף ב'

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה , שערך כל אחד מהם קטן מ- 102 .

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה

(לאו דווקא הסכום של כל האיברים)

הסדרה היא : 100, ... , 10 , 4, -2

$$d = 6$$
$$n = 18$$
$$a_{18} = 100$$

מופיעה בדף הנוסחאות

$$(1)\ S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

$$(2)\ S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

נוסחה נוחה לשימוש

כדי שהסכום יהיה מקסימלי – נחבר רק את החיוביים כלומר

$$S = \underbrace{4 + 10 + 16 + \cdots + 100}_{\text{17 איברים}} = \frac{(4+100)\cdot 17}{2} = 884$$

הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה הוא 884

טיפ !

* לזיהוי סוג סדרה :

* איבר כללי במבנה : $a_n = a \cdot n + b$

מייצג סדרה חשבונית (ההפרש $d = a$)

* * איבר כללי במבנה : $a_n = a \cdot b^n$

מייצג סדרה הנדסית (המנה $q = b$)

בשאלה שלנו

$a_n = 6n - 8$

הוכחות בשקפים הבאים

הוכחת הטיפים

* **הוכחת**

$$a_n = a \cdot n + b$$

$$a_{n+1} = a \cdot (n+1) + b = an + a + b$$

$$a_{n+1} - a_n = \underbrace{an + a + b}_{a_{n+1}} - (\underbrace{a \cdot n + b}_{a_n}) = an + a + b - a \cdot n - b = a$$

הראינו שהפרש בין כל שני איברים סמוכים קבוע - a $\longrightarrow$ $a_{n+1} - a_n = a$

כלומר: **איבר כללי במבנה : $a_n = a \cdot n + b$**

מייצג סדרה חשבונית (ההפרש $d = a$)

הוכחת הטיפ

הוכחת **

$$a_n = a \cdot b^n$$

$$a_{n+1} = a \cdot b^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a \cdot b^{n+1}}{a \cdot b^n} = b$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = b \longrightarrow$$ הראינו שהמנה בין כל שני איברים סמוכים קבוע - b

כלומר:

איבר כללי במבנה : $a_n = a \cdot b^n$

מייצג סדרה הנדסית (המנה $q = b$)

שאלון 806- קיץ תשע"ה– מועד א'

סדרה הנדסית אין סופית יורדת – מעניינת

שאלה 3 <u>בגרות קיץ תשע"ה– מועד א'</u>

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים.....,a_1, a_2 , a_3 , ... , a_n

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

אחד לפניו ואחד אחריו.

א. מצא את המנה של הסדרה a_n.

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 20,460 .

מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

שאלה 3 דיון – סעיף א'

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים...... $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$,

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

אחד לפניו ואחד אחריו.

א. מצא את המנה של הסדרה a_n.

שאלה 3 פתרון – סעיף א' - דרך א'

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים $a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots\ldots, \ a_n, \ldots\ldots$

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

אחד לפניו ואחד אחריו. א. מצא את המנה של הסדרה a_n.

$a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3$

כל איבר הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני צדדיו - בפרט מתקיים: ש:

$$a_2 = \frac{2}{5}(a_1 + a_3)$$

$$a_1 q = \frac{2}{5}(a_1 + a_1 q^2)$$

$$a_1 q = \frac{2}{5} a_1 (1 + q^2) \quad / : (\ a_1 > 0)$$

$$q = \frac{2}{5}(1 + q^2) \quad / \cdot 5$$

$$5q = 2 + 2q^2 \Rightarrow$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(2q - 1)(q - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{q = \frac{1}{2}}, \quad \cancel{q = 2}$$

בסדרה הנדסית אין סופית $|q| < 1$

המנה של הסדרה a_n היא $q = 0.5$

שאלה 3 פתרון – סעיף א' - דרך ב' - הוכחה כללית

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים $a_1,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ a_n\ ,\ldots\ldots$

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

אחד לפניו ואחד אחריו. א. מצא את המנה של הסדרה a_n.

כל איבר הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני צדדיו

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

$a_{n-1}\ ,\ a_n\ ,\ a_{n+1}$

$$\frac{a_n}{q}\ ,\ a_n\ ,\ a_n \cdot q$$

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1})$$

שאלה 3 פתרון – סעיף א' - דרך ב' - הוכחה כללית

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים ......, a_n , ... , a_3 , a_2 , a_1

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

אחד לפניו ואחד אחריו. א. מצא את המנה של הסדרה a_n .

כל איבר הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני צדדיו

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

a_{n-1} , a_n , a_{n+1}

$$\frac{a_n}{q} \;,\; a_n \;,\; a_n \cdot q$$

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1})$$

שאלה 3 פתרון – סעיף א' - דרך ב' - הוכחה כללית

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

אחד לפניו ואחד אחריו. א. מצא את המנה של הסדרה a_n.

$$\boxed{\begin{aligned} a_{n-1} &= \frac{a_n}{q} \\ a_{n+1} &= a_n \cdot q \end{aligned}}$$

a_{n-1}, a_n, a_{n+1}

$$\frac{a_n}{q}, \quad a_n, \quad a_n \cdot q$$

כל איבר הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני צדדיו

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1})$$

$$a_n = \frac{2}{5}\left(\frac{a_n}{q} + a_n \cdot q\right)$$

$$a_n = \frac{2a_n}{5}\left(\frac{1}{q} + q\right) \quad / : a_n \ (a_n > 0)$$

$$1 = \frac{2}{5}\left(\frac{1+q^2}{q}\right) / \cdot 5q$$

$$5q = 2(1+q^2)$$

$$5q = 2 + 2q^2 \Rightarrow$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(2q-1)(q-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{q = \frac{1}{2}}, \quad \cancel{q = 2}$$

בסדרה הנדסית אין סופית

$$|q| < 1$$

המנה של הסדרה a_n היא $q = 0.5$

שאלה 3 פתרון – סעיף א' - דרך ג' - הוכחה כללית

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

אחד לפניו ואחד אחריו. א. מצא את המנה של הסדרה a_n.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$
$$a_{n+2} = a_n \cdot q^2$$

כל איבר הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני צדדיו

$a_n \quad , \quad a_{n+1} \quad , \quad a_{n+2}$

$$a_n \quad , \; a_n \cdot q \; , \; a_n \cdot q^2$$

$$a_{n+1} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+2})$$

$$a_n q = \frac{2}{5}(a_n + a_n \cdot q^2)$$

המנה של הסדרה a_n היא $q = 0.5$

שאלה 3 פתרון – סעיף א' - דרך ג' - הוכחה כללית

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

אחד לפניו ואחד אחריו. א. מצא את המנה של הסדרה a_n.

$a_n\ ,\ a_{n+1}\ ,\ a_{n+2}$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$
$$a_{n+2} = a_n \cdot q^2$$

כל איבר הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני צדדיו

$$a_{n+1} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+2})$$

$$a_n q = \frac{2}{5}(a_n + a_n \cdot q^2)$$

$$a_n q = \frac{2a_n}{5}(1+q^2) \quad / : a_n \ (a_n > 0)$$

$$q = \frac{2}{5}(1+q^2) / \cdot 5q$$

$$5q = 2(1+q^2)$$

$$5q = 2 + 2q^2 \Rightarrow$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(2q-1)(q-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{q = \frac{1}{2}} \ , \ \cancel{q = 2}$$

בסדרה הנדסית אין סופית
$$|q| < 1$$

המנה של הסדרה a_n היא $q = 0.5$

שאלה 3 דיון – סעיף ב' (1)

מסעיף א' -נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתתה : $q=\frac{1}{2}$

ב. נתונה הסדרה $b_n=\frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית

דרך מקובלת

שאלה 3 פתרון - סעיף ב' (1) – בדרך המקובלת

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q=\frac{1}{2}$

ב. נתונה הסדרה $b_n=\frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

כדי להראות שהסדרה b_n היא הנדסית עלינו להראות שמתקיים :

$$\boxed{\frac{b_{n+1}}{b_n}=\text{קבוע}}$$

a_n , a_{n+1} , a_{n+2}

$$a_n\ ,\ a_n\cdot q\ ,\ a_n\cdot q^2$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2}}{\frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}}=\frac{a_{n+2}\cdot(a_n)^2}{(a_{n+1})^2\cdot a_{n+1}}=\frac{a_n\cdot q^2\cdot(a_n)^2}{(a_n\cdot q)^2\cdot a_n\cdot q}=\frac{a_n\cdot q^2\cdot a_n{}^2}{a_n{}^2\cdot q^2\cdot a_n\cdot q}=\frac{1}{q}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

קבוע – לא תלוי ב- n

הסדרה b_n היא סדרה הנדסית עם מנה $q=2$

דרך יעילה

שאלה 3 דיון – סעיף ב' (1) – דרך יעילה

מסעיף א' -נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית

איך נפשט את הצגת b_n

שאלה 3 הצגת b_n בצורה נוחה יותר- סעיף ב' (1)

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

הצגת b_n בצורה נוחה יותר

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2} = \frac{a_n \cdot q}{(a_n)^2} = \frac{q}{a_n} = \frac{\frac{1}{2}}{a_n} = \frac{1}{2a_n}$$

שאלה 3 המשך דיון - סעיף ב' (1)

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q=\frac{1}{2}$

ב. נתונה הסדרה $b_n=\frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית

$$\boxed{b_n=\frac{1}{2a_n}}$$

שאלה 3 פתרון - סעיף ב' (1)

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q=\frac{1}{2}$

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

$$\boxed{b_n = \frac{1}{2a_n}}$$

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית

כדי להראות שהסדרה b_n היא הנדסית עלינו להראות שמתקיים :

$$\boxed{\frac{b_{n+1}}{b_n} = \text{קבוע}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{2a_{n+1}}}{\frac{1}{2a_n}} = \frac{2a_n}{2a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n \cdot q} = \frac{1}{q} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \longleftarrow$$

קבוע – לא תלוי ב- n

הסדרה b_n היא סדרה הנדסית עם מנה $q = 2$

שאלה 3 דיון - סעיף ב' (2)

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q=\frac{1}{2}$

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

ב. (1) הסדרה b_n היא סדרה הנדסית עם מנה $q = 2$

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 20,460 .

$$b_n=\frac{1}{2a_n}$$

מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

מה אפשר לחלץ מהמידע של סעיף זה ?

שאלה 3 חישוב b_1 - סעיף ב' (2)

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

ב. (1) הסדרה b_n היא סדרה הנדסית עם מנה $q = 2$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{2a_n}}$$

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 20,460 .

מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

אפשר לחלץ מהמידע של סעיף זה את b_1

$$\left.\begin{aligned} S_{10} &= \frac{b_1(2^{10}-1)}{2-1} = b_1(2^{10}-1) = b_1 \cdot 1023 \\ S_{10} &= 20460 \end{aligned}\right\} \quad b_1 \cdot 1023 = 20460 \;\Rightarrow\; \boxed{b_1 = 20}$$

שאלה 3 המשך דיון - סעיף ב' (2) – בדרך הרגילה

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q=\frac{1}{2}$

ב. (2) מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$$

$$\boxed{S=\frac{a_1}{1-q}}$$

$$\boxed{b_1=20}$$

שאלה 3 המשך דיון - סעיף ב' (2) – בדרך הרגילה

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q=\frac{1}{2}$

ב. (2) מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$$

$$\boxed{S=\frac{a_1}{1-q}}$$

$$\boxed{b_1=20}$$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{(a_n)^2} \Rightarrow b_1=\frac{a_2}{(a_1)^2}=\frac{a_1\cdot\frac{1}{2}}{(a_1)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{a_1}=\frac{1}{2a_1} \Rightarrow b_1=\frac{1}{2a_1}$$

$$20=\frac{1}{2a_1}$$

$$40a_1=1$$

$$a_1=\frac{1}{40}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1=\frac{1}{40} \\ q=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{40}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{40}=\frac{1}{20}$$

סכום הסדרה a_n הוא $S=\frac{1}{20}$

בדרך היעילה

שאלה 3 המשך דיון - סעיף ב' (2) – בדרך היעילה

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתתה : $q = \frac{1}{2}$

ב. (2) מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

$$\boxed{b_n = \frac{1}{2a_n}}$$

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$$

$$\boxed{b_1 = 20}$$

שאלה 3 פתרון - סעיף ב' (2)

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q=\frac{1}{2}$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{2a_n}}$$

$$\boxed{b_1=20}$$

ב. (2) מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

$$\boxed{S=\frac{a_1}{1-q}}$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{2a_n}} \longrightarrow b_1=\frac{1}{2a_1} \Rightarrow a_1=\frac{1}{2b_1}=\frac{1}{2\cdot 20} \Rightarrow \boxed{a_1=\frac{1}{40}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1=\frac{1}{40} \\ q=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{40}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{40}=\frac{1}{20}$$

סכום הסדרה a_n הוא $S=\frac{1}{20}$

טיפ !

* שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית אפשר להציג :

a_{n-1} , a_n , a_{n+1} → $\frac{a_n}{q}\ ,\ a_n\ ,\ a_n \cdot q$

a_n , a_{n+1} , a_{n+2} → $a_n\ ,\ a_n \cdot q\ ,\ a_n \cdot q^2$

* שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית אפשר להציג :

a_{n-1} , a_n , a_{n+1} → $a_n - d\ ,\ a_n\ ,\ a_n + d$

a_n , a_{n+1} , a_{n+2} → $a_n\ ,\ a_n + d\ ,\ a_n + 2d$

שאלון 806- קיץ תשע"ג– מועד ב'

סדרת סכומים – כסדרת נסיגה

שאלה 4 בגרות קיץ תשע"ג – מועד ב'

נתונה סדרה a_n : a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n , ...

ונתונה סדרת הסכומים S_n : S_1 , S_2 , S_3 , ... , S_n , ...

S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי : $S_{n+1} = b\cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

ב. נתון כי $|b| < 1$.

בונים מהסדרה a_n שתי סדרות הנדסיות , I ו – II :

I. a_3 , a_7 , a_{11} , a_{15} ,......

II. a_1 , $-a_3$, a_5 , $-a_7$,......

T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I ,

M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II ,

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

שאלה 4 דיון - סעיף א'

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי : $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

איך ניגשים לשאלה כזו ...

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי : $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

$$S_1 = 3 \quad \Rightarrow \boxed{S_1 = a_1 = 3}$$

$$S_1 = 3 \ , \quad S_2 = b \cdot S_1 + 3 = b \cdot 3 + 3 \Rightarrow \boxed{S_2 = 3b + 3}$$

$$S_2 = 3b + 3 \ , \quad S_3 = b \cdot S_2 + 3 = b \cdot (3b+3) + 3 = 3b^2 + 3b + 3 \Rightarrow \boxed{S_3 = 3b^2 + 3b + 3}$$

$$S_1 = 3 \ , \quad S_2 = 3b + 3 \Rightarrow a_2 = S_2 - S_1 = \underbrace{3b+3}_{S_2} - \underbrace{3}_{S_1} = 3b \Rightarrow a_2 = 3b$$

$$S_2 = 3b + 3 \ , \quad S_3 = 3b^2 + 3b + 3 \Rightarrow a_3 = S_3 - S_2 = \underbrace{3b^2 + 3b + 3}_{S_3} - \underbrace{3b+3}_{S_2} = 3b^2 \Rightarrow a_3 = 3b^2$$

שאלה 4 דיון - סעיף א'

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי :

$$S_{n+1} = b \cdot S_n + 3 \quad , \quad S_1 = 3 \quad , \quad b \neq 0$$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

שאלה 4 פתרון יעיל - סעיף א'

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי :

$$b \neq 0 \quad , \quad S_1 = 3 \ , \quad S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

$$(1) \qquad S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$$

$$(2) \qquad S_n = b \cdot S_{n-1} + 3$$

$$(1)-(2) \quad \underbrace{S_{n+1} - S_n}_{a_{n+1}} = b \cdot S_n - b \cdot S_{n-1} = b(\underbrace{S_n - S_{n-1}}_{a_n})$$

$$a_{n+1} = b \cdot a_n \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = b \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = b}$$

הסדרה a_n היא סדרה הנדסית עם מנה $q = b$

שאלה 4 דיון - סעיף א' - בדרך הסטנדרטית

נתונה סדרה a_n : a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n , ...

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי : $b \neq 0$, $S_1 = 3$, $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

נתאר את a_n

בשאלה השנייה שפתרנו הראנו ש:

$$\boxed{S_n - S_{n-1} = a_n}$$

שאלה 4 הצגה נוחה ל- a_n - סעיף א'

נתונה סדרה a_n : a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n , ...

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי : $b \neq 0 \quad , \quad S_1 = 3 \ , \quad S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

בשאלה השנייה שפתרנו הראנו ש:

$$\boxed{S_n - S_{n-1} = a_n}$$

נתאר את a_n

$$b \neq 0 \quad , a_n = S_n - S_{n-1} = \underbrace{b \cdot S_{n-1} + 3}_{S_n} - S_{n-1} = S_{n-1}(b-1) + 3$$

$$\boxed{b \neq 0 \quad , \quad a_n = S_{n-1}(b-1) + 3}$$

שאלה 4 המשך דיון - סעיף א'

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי : $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{קבוע} = q$$

$$b \neq 0 \quad , \quad a_n = S_{n-1}(b-1) + 3$$

שאלה 4 פתרון - סעיף א'

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי : $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

$$b \neq 0 \quad , \quad a_n = S_{n-1}(b-1)+3$$

6 4 7 S_n 4 8

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{S_n(b-1)+3}{S_{n-1}(b-1)+3} = \frac{(b \cdot S_{n-1}+3)(b-1)+3}{S_{n-1}(b-1)+3} =$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b \cdot S_{n-1}(b-1)+3(b-1)+3}{S_{n-1}(b-1)+3} = \frac{b \cdot S_{n-1}(b-1)+3b-3+3}{S_{n-1}(b-1)+3} =$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b\left[\ S_{n-1}(b-1)+3\ \right]}{S_{n-1}(b-1)+3} = b$$

שאלה 4 דיון- סעיף ב'

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

ב. נתון כי $|b| < 1$.

בונים מהסדרה a_n שתי סדרות הנדסיות , I ו $- II$:

$I. \quad a_3 \; , \; a_7 \; , a_{11} \; , a_{15} \; ,......$

T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I ,

$II. \quad a_1 \; , \; -a_3 \; , a_5 \; ,-a_7 \; ,......$

M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II ,

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

נטפל בכל סדרה בנפרד

שאלה 4 דיון על סכום סדרה I

$$S=\frac{a_1}{1-q}$$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

ב. נתון כי $|b| < 1$.

בונים מהסדרה a_n סדרה הנדסית I :

I. a_3 , a_7 , a_{11} , a_{15} ,......

T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I ,

שאלה 4 פתרון לסכום סדרה I - T

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$

ב. נתון כי $|b| < 1$.

בונים מהסדרה a_n סדרה הנדסית I :

$$\mathrm{I.} \quad a_3 \; , \; a_7 \; , a_{11} \; , a_{15} \; , \ldots\ldots$$

T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I ,

מנת הסדרה I :

$$q_{\mathrm{I}} = \frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 \cdot q^6}{a_1 \cdot q^2} = q^4 = b^4$$

סדרה I סדרה הנדסית אין סופית מתכנסת

$$|b| < 1 \Rightarrow \; 0 < b^4 < 1$$

$$\boxed{T = \frac{a_3}{1-b^4} = \frac{a_1 \cdot b^2}{1-b^4}}$$

שאלה 4 דיון על סכום סדרה II

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b.

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$$

ב. נתון כי $|b| < 1$.

בונים מהסדרה a_n סדרה הנדסית II :

$$\text{II.} \quad a_1 \ , \ -a_3 \ , a_5 \ , -a_7 \ , \ldots\ldots$$

M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

ב. נתון כי $|b| < 1$.

בונים מהסדרה a_n סדרה הנדסית I I :

$$\text{II.} \quad a_1 \ , \ -a_3 \ , a_5 \ , -a_7 \ , \ldots\ldots$$

M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I I

מנת הסדרה I I :

$$q_{\text{II}} = \frac{-a_3}{a_1} = \frac{-a_1 \cdot q^2}{a_1} = -q^2 = -b^2$$

סדרה I I סדרה הנדסית אין סופית מתכנסת

$$|b| < 1 \Rightarrow \left|-b^2\right| < 1$$

$$\boxed{M = \frac{a_1}{1-(-b^2)} = \frac{a_1}{1+b^2}}$$

שאלה 4 דיון - חישוב היחס

T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I :

$$\boxed{T=\frac{a_1\cdot b^2}{1-b^4}}$$

M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II :

$$\boxed{M=\frac{a_1}{1+b^2}}$$

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

שאלה 4 פתרון - חישוב היחס

T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I :

$$T=\frac{a_1\cdot b^2}{1-b^4}$$

M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II :

$$M=\frac{a_1}{1+b^2}$$

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

$$\frac{M}{T}=\frac{\dfrac{a_1}{1+b^2}}{\dfrac{a_1\cdot b^2}{1-b^4}}=\frac{a_1}{1+b^2}:\frac{a_1\cdot b^2}{1-b^4}=\frac{a_1}{(1+b^2)}\cdot\frac{(1-b^4)}{a_1\cdot b^2}=\frac{(1-b^2)\cdot(1+b^2)}{b^2\cdot(1+b^2)}=\frac{(1-b^2)}{b^2}$$

היחס $\frac{M}{T}=\frac{1-b^2}{b^2}$

לסיכום ...

מידע חשוב על סדרה חשבונית והנדסית

סדרה חשבונית- איבר כללי - סיכום

סדרה חשבונית: סדרה שההפרש בין כל שני איברים עוקבים – קבוע . ההפרש הקבוע נקרא : d

הדרך להוכיח שסדרה היא סדרה חשבונית $\longrightarrow$ $\boxed{a_{n+1}-a_n=\text{קבוע}=d}$

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית: $\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$

* אם X , Y , Z שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית אז: $y=\frac{x+z}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y-x=z-y$

מכאן השם : האיבר האמצעי **ממוצע** חשבוני של שני צדדיו

* וכן מתקיים: $y=\frac{k}{3} \quad \Rightarrow \quad x+y+z=k$

* שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית אפשר להציג :

$\boxed{a_{n-1}\ ,\ a_n\ ,\ a_{n+1} \rightarrow a_n-d\ ,\ a_n\ ,\ a_n+d}$

$\boxed{a_n\ ,\ a_{n+1}\ ,\ a_{n+2} \rightarrow a_n\ ,\ a_n+d\ ,\ a_n+2d}$

* איבר כללי במבנה : $a_n=a\cdot n+b$ מייצג איבר כללי של סדרה חשבונית (ההפרש $d=a$)

סכום סדרה חשבונית

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

*** נוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית:**

$$(1) \quad S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

בדף הנוסחאות

$$(2) \quad S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

נוסחה שימושית

*** סכום חלקי :** $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = S_m - S_{k-1}$

*** אפשר גם : להסתכל עליה כעל סדרה חשבונית :**

שהאיבר הראשון שלה a_k, הפרש d ומס' האיברים : m-(k-1) =m-k+1

*** בכל סדרה מתקיים :** $a_n = S_n - S_{n-1}$

*** סדרה אשר סכומה מתואר** $S_n = a \cdot n^2 + bn \quad a, b \neq 0,$ **היא סדרה חשבונית**

סדרה הנדסית - איבר כללי - סיכום

סדרה הנדסית: סדרה שהמנה בין כל שני איברים עוקבים – קבוע . המנה הקבועה נקראת : q

הדרך להוכיח שסדרה היא סדרה הנדסית $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \text{קבוע} = q}$

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית: $\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

* אם X , Y , Z שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית אז: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{Z}{Y} \Leftrightarrow y^2 = x \cdot z \Rightarrow y = \sqrt{x \cdot z}$

מכאן השם : האיבר האמצעי **ממוצע** הנדסי של שני צדדיו

* שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית אפשר להציג :

$$\boxed{a_{n-1}\ ,\ a_n\ ,\ a_{n+1} \ \rightarrow\ \frac{a_n}{q}\ ,\ a_n\ ,\ a_n \cdot q}$$

$$\boxed{a_n\ ,\ a_{n+1}\ ,\ a_{n+2} \ \rightarrow\ a_n\ ,\ a_n \cdot q\ ,\ a_n \cdot q^2}$$

* איבר כללי במבנה : $a_n = a \cdot b^n$ מייצג איבר כללי של סדרה הנדסית (המנה $q = a$)

סכום סדרה הנדסית

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

* נוסחאות לסכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית:

* הנוסחה המופיעה בדף הנוסחאות לבגרות: $\longrightarrow$ (1) $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$

* הנוסחה מומלצת לשמוש כאשר l q l< 1: $\longrightarrow$ (2) $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

* משתמשים כאשר ידוע האיבר האחרון $\longrightarrow$ (3) $S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1} = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$

* בכל סדרה מתקיים : $a_n = S_n - S_{n-1}$

* זיכרו את הקשר : $\left(q^n\right)^2 = \left(q^2\right)^n = q^{2n}$

* סכום סדרה הנדסית אין סופית שמנתה שבר אמיתי : $|q| < 1 \ , \ S = \frac{a_1}{1-q}$