

# בגרוּפּ

למידה חברתית לבגרות

שאלון 481 (804)

מורה למתמטיקה: רות הלפנבאום

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

17/04/2019

עורכי המצגת: רן סודאי ורות הלפנבאום

# נוסחאות – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי:

### נגזרות:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{נגזרת של מכפלת פונקציות} \quad ; \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad (x^t)' = tx^{t-1} \quad (t \text{ ממשי})$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{נגזרת של מנת פונקציות} \quad ; \quad (\sin x)' = \cos x \quad ; \quad (\cos x)' = -\sin x \quad ; \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x) \quad \text{נגזרת של פונקציה מורכבת} \quad ; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad ; \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad ; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

כאשר  $u'(x)$  היא נגזרת של  $u$  לפי  $x$  (נגזרת פנימית)

ו-  $f'(u)$  היא נגזרת של  $f$  לפי  $u$  (נגזרת חיצונית).

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad ; \quad (t \text{ ממשי, } t \neq -1) \int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C \quad \text{אינטגרלים:}$$

$$\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + C \quad \text{אם } F(x) \text{ היא פונקציה קדומה של הפונקציה } f(x) \text{ אז}$$

## מה בתכנית?

- בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

- בגרות חורף תשע"ח – שאלת ערך קיצון

## מה בתכנית?

- בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

- בגרות חורף תשע"ח – שאלת ערך קיצון

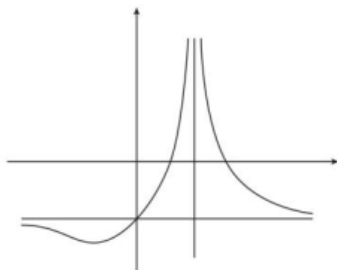
## בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

6. א. (1)  $x \neq 1$  . (2)  $x=1$  ,  $y=a$  . (3) מינימום:  $(-1, a-1)$  .

(4) עלייה:  $-1 < x < 1$  , ירידה:  $x < -1$  ,  $1 < x$  .

ב.  $a = -3$  . ג. (1)  $(0, -3)$  . (2)

ד.  $k = -3$  ,  $k = -4$  .



• נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} + a$  . פרמטר  $a$  .

• ענה על סעיף א' באמצעות  $a$  במידה הצורך.

א- (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$  ?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים?

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  , וקבע את סוגן.

(4) מה הן תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  ?

• נתון: לפונקציה יש אסימפטוטה שמשוואתה היא  $y = -3$  .

ב- מהו ערך הפרמטר  $a$  ?

• הצב את הערך של  $a$  שמצאת וענה על הסעיפים ג'-ד'.

ג- (1) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $y$  .

(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  .

ד- עבור אילו ערכים של  $k$  הישר  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה אחת בדיוק?

## בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

• נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} + a$  פרמטר  $a$ .

• ענה על סעיף א' באמצעות  $a$  במידה הצורך.

א- (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?

• ל-  $f(x)$  יש מכנה. נדרוש שהמכנה יהיה שונה מאפס:

$$(x - 1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

תחום הגדרה:

$$x \neq 1$$

## בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

- אסימפטוטה אנכית: נבדוק את התנהגות הפונקציה כאשר  $x$  שואף לקצה תחום ההגדרה, במקרה שלנו  $x \rightarrow 1$ :  
$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} + a \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{4}{0} + a \rightarrow \infty$$
- כאשר גודל סופי (4) מחולק בגודל אפסי, כל השבר ישאף לערך אינסופי.
- מסקנה:  $x=1$  אסימפטוטה אנכית.

- נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} + a$ . פרמטר  $a$ .
- ענה על סעיף א' באמצעות  $a$  במידה הצורך.
- א- (2) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים?
- אסימפטוטות אנכיות נבדוק בקצות תחום ההגדרה, במקרה שלנו ב-  $x=1$ , ואסימפטוטות אופקיות נבדוק כאשר  $x$  שואף לערך אינסופי.

אינסופי.

**תחום הגדרה:**

$$x \neq 1$$

**אסימפטוטה אנכית:**

$$x = 1$$

## בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

- אסימפטוטה אופקית: נבדוק את התנהגות הפונקציה כאשר  $x$  שואף לערכים אינסופיים:

$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} + a \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2} + a = \frac{4}{x} + a \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 + a = a$$

- כאשר גודל סופי (4) מחולק בגודל אינסופי, כל השבר ישאף לאפס.
- במקרה שלנו זה נכון גם כאשר  $x \rightarrow \infty$  וגם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , ולכן המסקנה:  $y=a$  אסימפטוטה אופקית.

- נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} + a$ . פרמטר  $a$ .

- ענה על סעיף א' באמצעות  $a$  במידה הצורך.

א- (2) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים?

- אסימפטוטות אנכיות נבדוק בקצות תחום ההגדרה, במקרה שלנו ב-  $x=1$ , ואסימפטוטות אופקיות נבדוק כאשר  $x$  שואף לערך אינסופי.

אינסופי.

תחום הגדרה:	אסימפטוטה אופקית:
$x \neq 1$	$y = a$
אסימפטוטה אנכית:	
$x = 1$	



## בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

• נגזור את  $f(x)$  לפי הנוסחה לנגזרת מנה ופונקציה מורכבת:

$$(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} + a$$

$$f'(x) = \frac{4(x-1)^2 - 4x \cdot 2(x-1) \cdot 1}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{4(x^2 - 2x + 1) - 8x(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{4(x^2 - 2x + 1) - 8x(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(x-1)^4} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(x-1)^4}$$

• נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} + a$ . פרמטר  $a$ .

• ענה על סעיף א' באמצעות  $a$  במידה הצורך.

א- (3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ ,

וקבע את סוגן.

(4) מה הן תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ ?

• כדי למצוא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי

העלייה והירידה שלה, נגזור אותה.

אסימפטוטה אופקית:

$$y = a$$

תחום הגדרה:

$$x \neq 1$$

אסימפטוטה אנכית:

$$x = 1$$

## בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

- נשווה את פונקציית הנגזרת הראשונה לאפס.  
מנה שווה לאפס כאשר המונה שלה שווה לאפס:  
 $(1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
- נשים לב שתחום ההגדרה הוא  $x \neq 1$  ולכן נקבל רק את  $x = -1$  כנקודה חשודה כקיצון.
- נבטא את שיעור ה-y של הנקודה:

$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} + a$$

$$f(-1) = \frac{4(-1)}{(-1-1)^2} + a = \frac{-4}{4} + a = -1 + a$$

- קיבלנו ש-  $(-1, a-1)$  נקודה חשודה כקיצון.

- נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} + a$  פרמטר a.
- ענה על סעיף א' באמצעות a במידה הצורך.
- א- (3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.
- (4) מה הן תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ ?

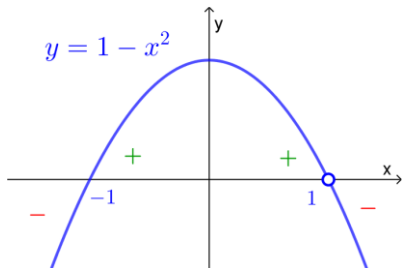
- פונקציית הנגזרת הראשונה:

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(x-1)^4} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(x-1)^4}$$

תחום הגדרה:	$x \neq 1$
אסימפטוטה אנכית:	$x = 1$
אסימפטוטה אופקית:	$y = a$
נק' חשודה כקיצון:	$(-1, a-1)$

## בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

- במכנה יש לנו ביטוי בחזקה זוגית ולכן הוא חיובי בתחום ההגדרה.
- סימן המונה הוא זה שקובע את הסימן של פונקציית הנגזרת.



- הביטוי במונה הוא פרבולה הפוכה, וב-  $x = -1$  הוא עובר משליליות לחיוביות, כלומר הפונקציה עוברת מירידה לעליה,

ולכן ב-  $x = -1$  תהיה לנו נקודת קיצון מסוג **מינימום**.

- נראה זאת גם עם טבלה:

x	$x < -1$	$-1$	$-1 < x < 1$	$1$	$x > 1$
$f'(x)$	-	0	+		-
$f(x)$	↘	min	↗		↘

- את תחומי העליה והירידה נקבל מהטבלה:

תחום עליה:  $-1 < x < 1$

תחומי ירידה:  $x < -1$  או  $1 < x$ .

- נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} + a$ . פרמטר a.

- ענה על סעיף א' באמצעות a במידה הצורך.

א- (3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ ,

וקבע את סוגן.

(4) מה הן תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ ?

- פונקציית הנגזרת הראשונה:

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(x-1)^4} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(x-1)^4}$$

תחום הגדרה: תחום עליה: אסימפטוטה אופקית:

$$x \neq 1$$

$$y = a$$

תחום ירידה:

$$x < -1 \text{ או } 1 < x$$

נקודת מינימום:

$$(-1, a - 1)$$

אסימפטוטה אנכית:

$$x = 1$$

## בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

• נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} + a$  פרמטר  $a$ .

• נתון: לפונקציה יש אסימפטוטה שמשוואתה היא  $y = -3$ .

ב- מהו ערך הפרמטר  $a$ ?

• מצאנו קודם שמשוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה היא  $y = a$ .

• נתון שלפונקציה יש אסימפטוטה שמשוואתה היא  $y = -3$ ,

ולכן נקבל ש-  $a = -3$ .

תחום עליה:

$$-1 < x < 1$$

תחומי ירידה:

$$x < -1 \text{ או } 1 < x$$

אסימפטוטה אופקית:

$$y = a$$

נקודת מינימום:

$$(-1, a - 1)$$

תחום הגדרה:

$$x \neq 1$$

אסימפטוטה אנכית:

$$x = 1$$

## בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

- כדי למצוא את שיעורי נק' החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y נציב  $x=0$  במשוואתה:

$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} - 3$$

$$f(0) = \frac{4 \cdot 0}{(0-1)^2} - 3 = 0 - 3 = -3$$

- קיבלנו נק' חיתוך עם ציר ה-y:  $(0, -3)$ .

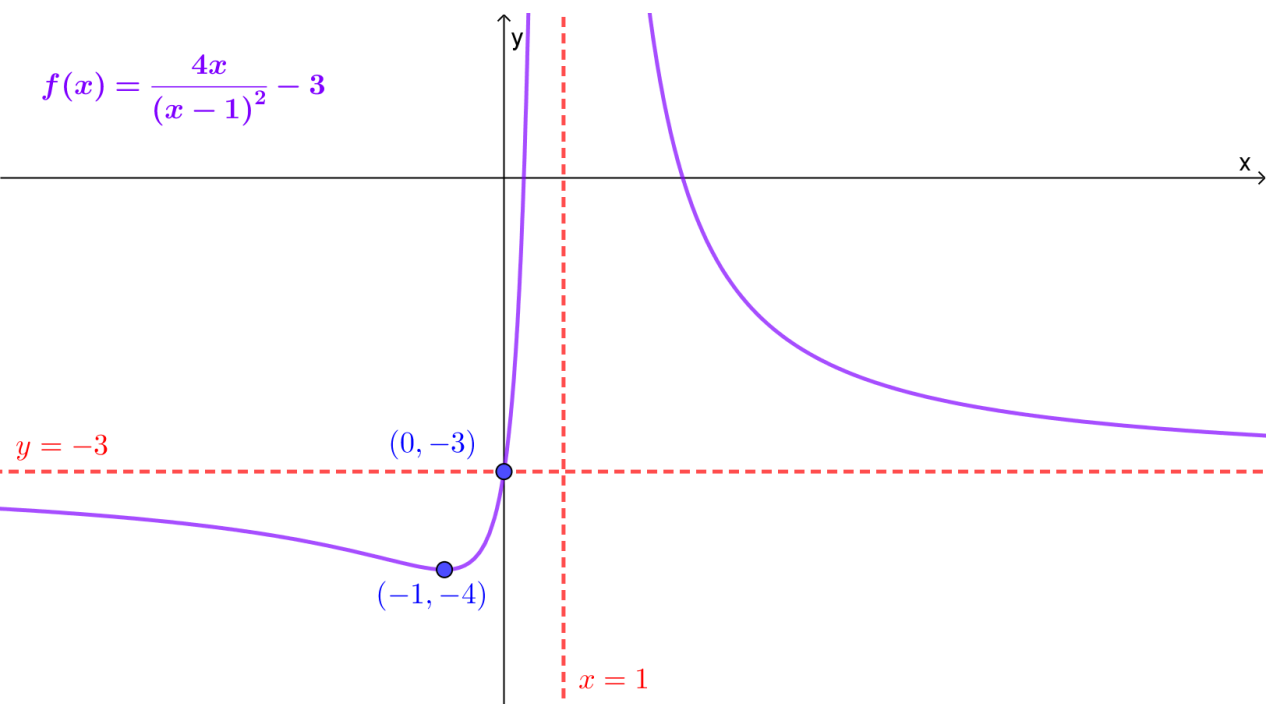
- נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} - 3$ .

- ג- (1) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה-y.

- ראשית נציב  $a = -3$  בערך ה-y של נק' המינימום שמצאנו ונקבל נק' מינימום ב-  $(-1, -4)$ .

תחום הגדרה:	אסימפטוטה אופקית:	תחום עליה:	נק' חיתוך עם ציר y:
$x \neq 1$	$y = -3$	$-1 < x < 1$	$(0, -3)$
אסימפטוטה אנכית:	נקודת מינימום:	תחומי ירידה:	
$x = 1$	$(-1, -4)$	$x < -1$ או $1 < x$	

## בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

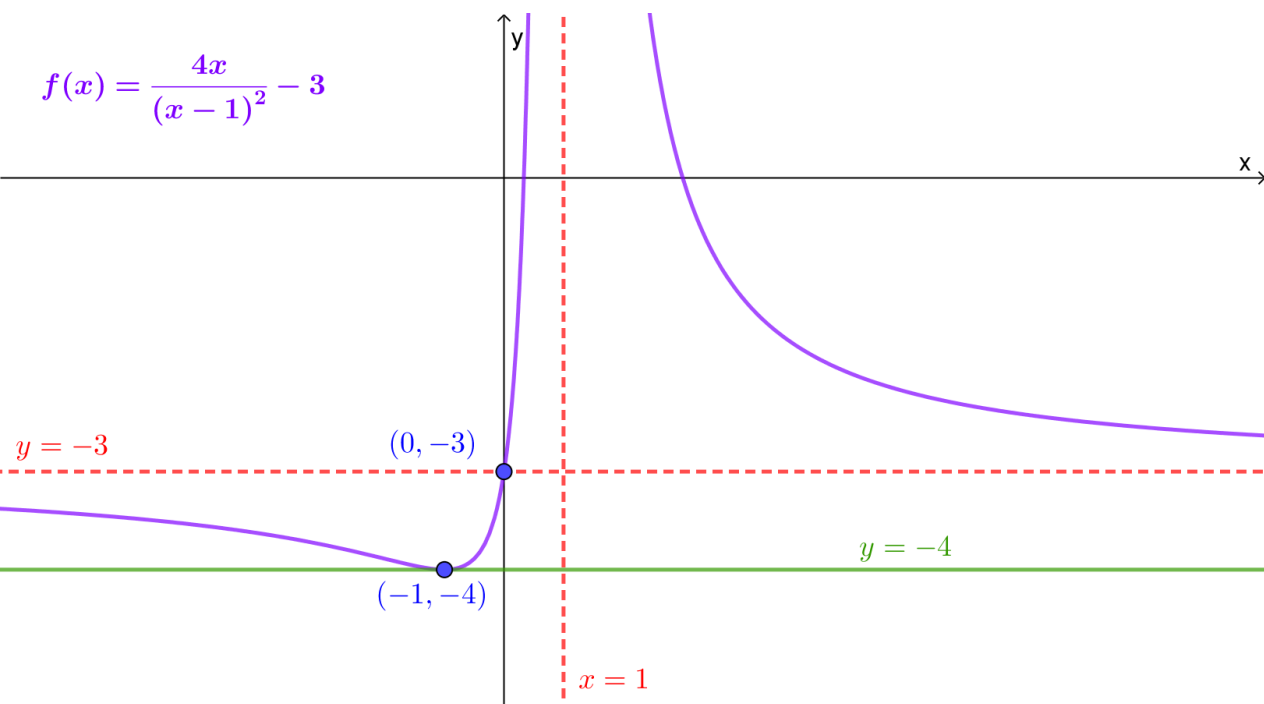


• נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} - 3$ .

ג- (2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

תחום הגדרה:	תחום עליה:	אסימפטוטה אופקית:	תחום הגדרה:
$x \neq 1$	$-1 < x < 1$	$y = -3$	$x \neq 1$
אסימפטוטה אנכית:	תחומי ירידה:	נקודת מינימום:	אסימפטוטה אנכית:
$x = 1$	$x < -1$ או $1 < x$	$(-1, -4)$	$x = 1$
נק' חיתוך עם ציר y:			
$(0, -3)$			

## בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית



• נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} - 3$ .

• עבור אילו ערכים של  $k$  הישר  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה אחת בדיוק?

• ישר מהצורה  $y = k$  הוא ישר אופקי.

• כדי שיחתוך את הפונקציה שחקרנו בנק' אחת בלבד, עליו:

- או להשיק אליה בנק' המינימום, כלומר:  $y = -4$ .

- או להתלכד עם האסימפטוטה האופקית, ולחתוך אותה בנק' החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ , כלומר:  $y = -3$ .

תחום הגדרה:	אסימפטוטה אופקית:	תחום עליה:	נק' חיתוך עם ציר $y$ :
$x \neq 1$	$y = -3$	$-1 < x < 1$	$(0, -3)$
אסימפטוטה אנכית:	נקודת מינימום:	תחומי ירידה:	
$x = 1$	$(-1, -4)$	$x < -1$ או $1 < x$	

## מה בתכנית?

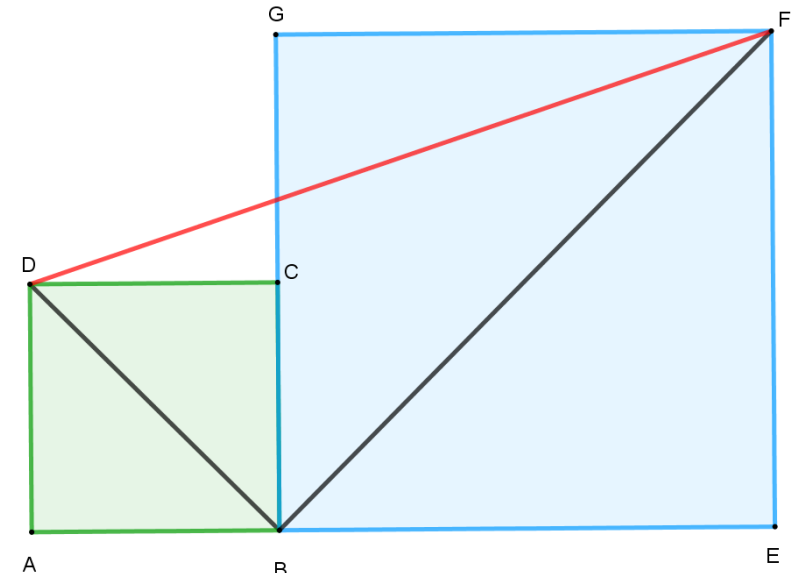
- בגרות חורף תשע"ח – חקירת פונקציה רציונאלית

- בגרות חורף תשע"ח – שאלת ערך קיצון



## בגרות חורף תשע"ח – שאלת ערך קיצון

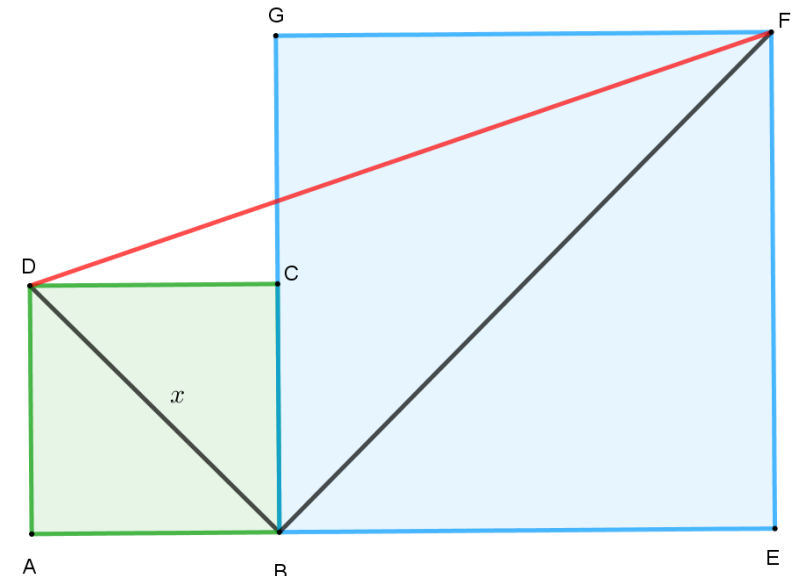
- ABCD ו- BEFG הם שני ריבועים.
- הצלע BC מונחת על הצלע BG.
- נתון:  $DB + BF = a$   $0 < a$  הוא פרמטר.
- א- מצא את אורך האלכסון DB שעבורו אורך הקטע DF הוא מינימלי. הבע באמצעות a.
- ב- עבור אורך DB שמצאת בסעיף א', מהו היחס BE:AB?
- שלבים בפתרון שאלת ערך קיצון:
  1. בחירת נעלם וכתיבת תחום הצבה.
  2. הבעה של גדלים משמעותיים בשאלה בעזרת הנעלם.
  3. בניית פונקציית מטרה.
  4. גזירה ומציאת ערך קיצון.
  5. בדיקה שסוג הקיצון (מינימום / מקסימום) תואם למה שמבוקש.
  6. תשובה מילולית.



1. בחירת נעלם וכתובת תחום הצבה

## בגרות חורף תשע"ח – שאלת ערך קיצון

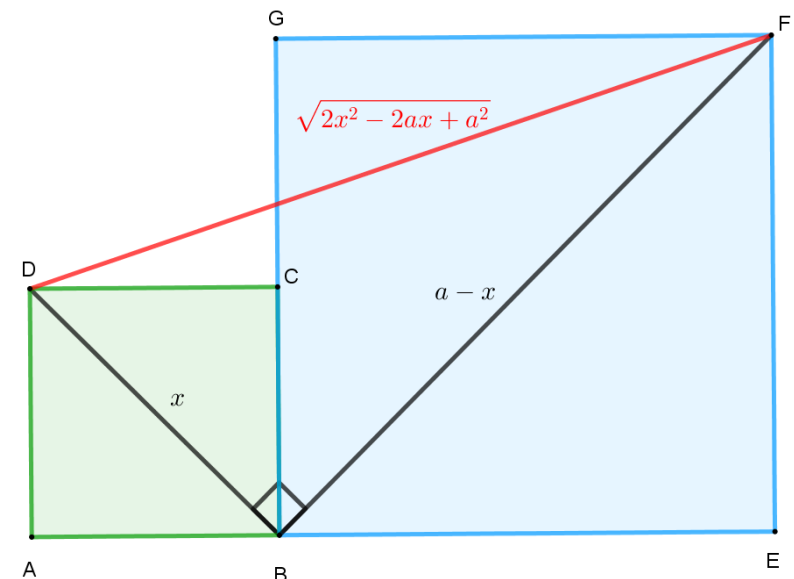
- ABCD ו- BEFG הם שני ריבועים.
  - הצלע BC מונחת על הצלע BG.
  - נתון:  $DB + BF = a$   $0 < a$  הוא פרמטר.
  - **א-** מצא את אורך האלכסון DB שעבורו אורך הקטע DF הוא מינימלי. הבע באמצעות  $a$ .
  - **ב-** עבור אורך DB שמצאת בסעיף א', מהו היחס  $BE:AB$ ?
- ביקשו שנמצא את אורך האלכסון DB שעבורו אורך הקטע DF הוא מינימלי.
  - נסמן אם כך את אורך האלכסון DB בתור  $x$ .
  - נתון שסכום האלכסונים של הריבועים הנתונים הוא  $a$ , ולכן תחום ההצבה ל-  $x$  שסימנו:  $0 < x < a$ .



2. הבעה של גדלים משמעותיים בשאלה בעזרת הנעלם

## בגרות חורף תשע"ח – שאלת ערך קיצון

- בריבוע האלכסונים הם חוצי זוויות. נקבל לפיכך ש-  
 $\sphericalangle DBF = \sphericalangle DBC + \sphericalangle GBF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$
- נביע לפיכך את אורך BF באמצעות a ו-x,  
ואז את DF נוכל להביע באמצעות משפט פיתגורס ב-  $\triangle DBF$ .
- נתון שסכום אלכסוני הריבועים הוא a, ולכן BF יהיה:  $BF = a - x$ .
- ABCD ו-BEFG הם שני ריבועים.  
הצלע BC מונחת על הצלע BG.  
נתון:  $DB + BF = a$  . הוא פרמטר.
- א- מצא את אורך האלכסון DB שעבורו  
אורך הקטע DF הוא מינימלי. הבע באמצעות a.
- ב- עבור אורך DB שמצאת בסעיף א',  
מהו היחס BE:AB?



## בגרות חורף תשע"ח – שאלת ערך קיצון

- נביע את DF באמצעות משפט פיתגורס ב-  $\triangle DBF$ :

$$DF = \sqrt{BD^2 + BF^2}$$

$$DF = \sqrt{x^2 + (a - x)^2}$$

$$DF = \sqrt{2x^2 - 2ax + a^2}$$

- נדרוש DF מינימלי.

- ABCD ו- BEFG הם שני ריבועים.

- הצלע BC מונחת על הצלע BG.

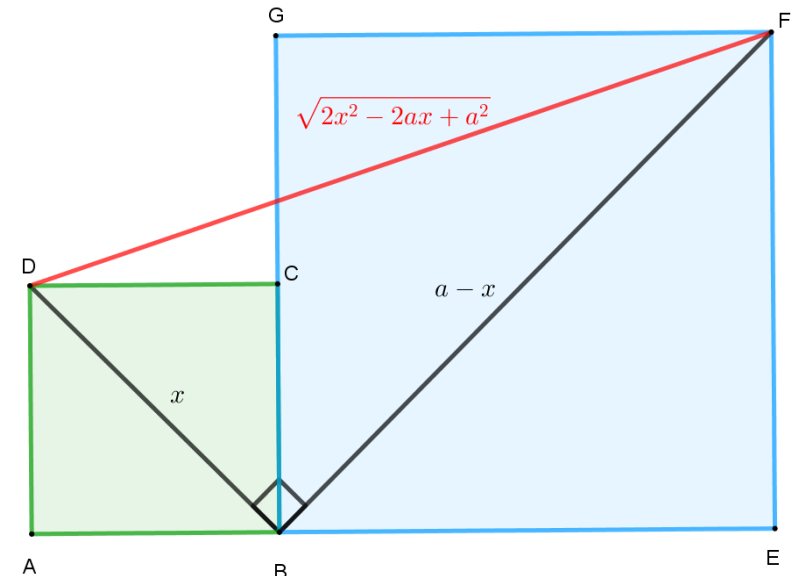
- נתון:  $DB + BF = a$   $0 < a$  הוא פרמטר.

- א- מצא את אורך האלכסון DB שעבורו

אורך הקטע DF הוא מינימלי. הבע באמצעות a.

- ב- עבור אורך DB שמצאת בסעיף א',

מהו היחס BE:AB?



# בגרות חורף תשע"ח – שאלת ערך קיצון

- 4. גזירה ומציאת ערך קיצון
- 5. בדיקת שסוג הקיצון הוא מה שנדרש
- 6. תשובה מילולית

הפונקציה DF:  $DF(x) = \sqrt{2x^2 - 2ax + a^2}$

נגזור:  $DF'(x) = \frac{4x-2a}{2\sqrt{2x^2-2ax+a^2}} = \frac{2x-a}{\sqrt{2x^2-2ax+a^2}}$

נשווה לאפס את הנגזרת.

מנה שווה לאפס כשהמונה שווה לאפס:

$$2x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

המכנה חיובי. סימן הנגזרת נקבע לפי סימן המונה.

המונה הוא פונקציה קווית עולה ולכן עובר משליליות לחיוביות,

כלומר הפונקציה עוברת מירידה לעליה

ולכן נקבל נק' מינימום ב-  $x = \frac{a}{2}$  וזאת כפי שנתבקשנו.

אורך האלכסון DB צריך להיות  $\frac{a}{2}$

כדי שאורך DF יהיה מינימלי.

• ABCD ו- BEFG הם שני ריבועים.

• הצלע BC מונחת על הצלע BG.

• נתון:  $DB + BF = a$  .  $0 < a$  הוא פרמטר.

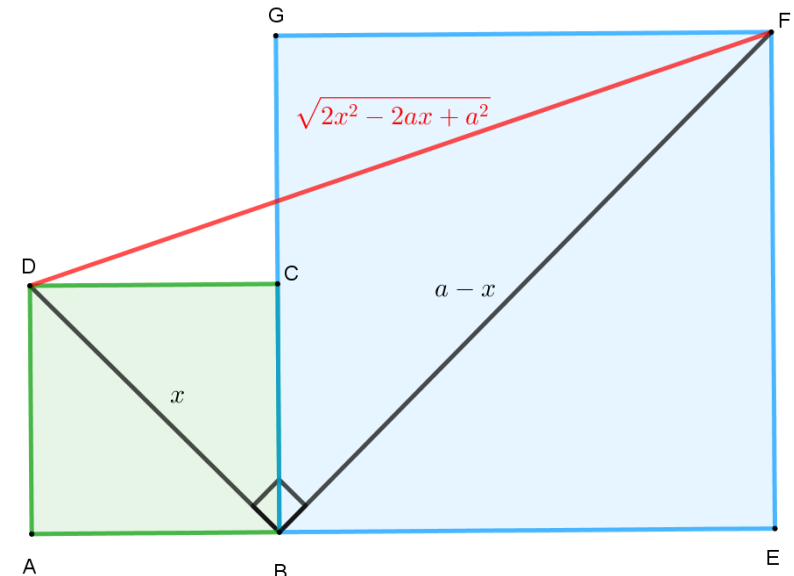
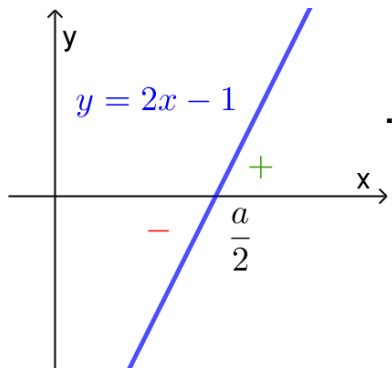
**א-** מצא את אורך האלכסון DB שעבורו

אורך הקטע DF הוא מינימלי. הבע באמצעות a.

**ב-** עבור אורך DB שמצאת בסעיף א',

מהו היחס BE:AB?

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   
 $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

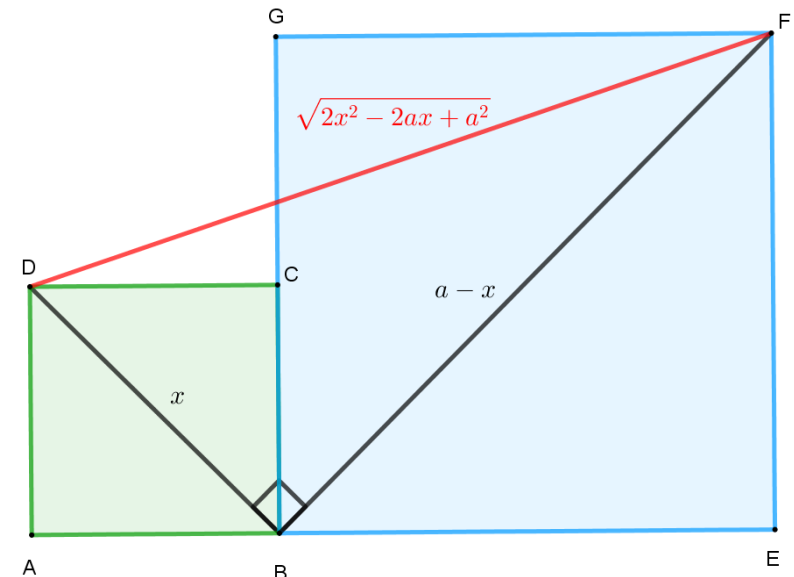


ב. מה היחס  $AB:BE$ ?

## בגרות חורף תשע"ח – שאלת ערך קיצון

- מצאנו ש-  $DB = \frac{a}{2}$ .
- מאחר ש-  $BF = a - DB$  נקבל שגם  $BF = \frac{a}{2}$ .
- נקבל לפיכך שהיחס המבוקש יהיה 1:1.
- ליישומון גיאוגברה להמחשה לחצו כאן: [GeoGebra](#)

- ABCD ו- BEFG הם שני ריבועים.
- הצלע BC מונחת על הצלע BG.
- נתון:  $DB + BF = a$  הוא פרמטר.  $0 < a$ .
- א- מצא את אורך האלכסון **DB** שעבורו אורך הקטע **DF** הוא מינימלי. הבע באמצעות  $a$ .
- ב- עבור אורך **DB** שמצאת בסעיף א', מהו היחס  $BE:AB$ ?



## בגרות חורף תשע"ח – שאלת ערך קיצון

סצוף  
בהפתרה!

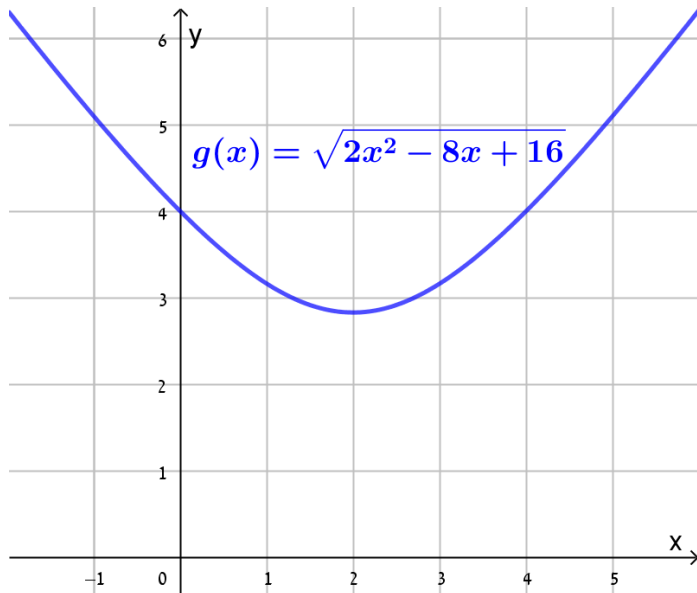
• נמצא לפיכך את נקודת הקיצון הפנימית של  $g(x)$ ,  
את נק' החיתוך עם ציר  $y$ , ונשרטט.

• נק' מינימום:  $g(2) = \sqrt{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 16} = 2\sqrt{2}$

קיבלנו נק' מינימום ב-  $(2, 2\sqrt{2})$ .

• נק' חיתוך עם ציר  $y$ :  $g(0) = \sqrt{2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 16} = 4$

• קיבלנו נק' חיתוך עם ציר  $y$ :  $(0, 4)$ .



ג- נתונה הפונקציה  $g(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$ . נק' מינימום ב-  $x = \frac{a}{2}$ . שרטטו אותה במערכת צירים.

• נזכיר שעסקנו בשאלה בפונקציה:  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2ax + a^2}$

וכעת אנו מתבקשים לשרטט את:  $g(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$ .

• נשים לב שהפונקציה  $g(x)$  היא  $f(x)$  כאשר  $a = 4$ !

• הביטוי שמתחת לסימן השורש הוא פונקציה ריבועית בעלת

מינימום. נק' המינימום של  $g(x)$  מתקבלת ב-  $x = 2$ , כלומר לכל

ערך אחר נקבל ערכים גבוהים יותר, ולכן הביטוי שמתחת לסימן

השורש לא יהיה שלילי, כלומר הפונקציה  $g(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .

• נראה זאת:  $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16 = -64 < 0$

• קיבלנו  $\Delta < 0$  וגם  $0 < a$  ולכן הפרבולה שמתחת לסימן השורש

"מרחפת" מעל ציר ה- $x$ , כלומר חיובית לכל  $x$ .

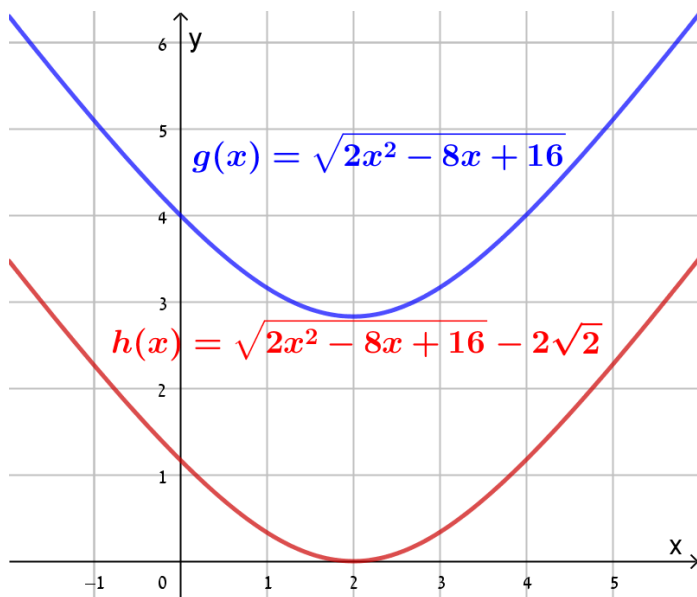


## בגרות חורף תשע"ח – שאלת ערך קיצון

ד- נתונה הפונקציה  $h(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} + k$ .

מה צריך להיות ערכו של  $k$  שעבורו לפונקציה  $h(x)$  תהיה נק' חיתוך אחת עם ציר ה- $x$ ?

- מדובר בהזזה אנכית של  $g(x)$  יחידות (מעלה אם חיובי, מטה אם שלילי).
- אנו רוצים של-  $h(x)$  תהיה נק' חיתוך אחת עם ציר ה- $x$ , ולכן נדרוש הזזה מטה עד שהפונקציה  $h(x)$  תשיק לציר ה- $x$ .
- ערך זה יהיה שיעור הנק' המינימום:  $k = 2\sqrt{2}$ .





## אז מה היה לנו פה?

- הזזות ומתיחות של פונקציה:  $g(x) = a \cdot f(mx - p) + k$
- $g(x)$  מתקבלת מ-  $f(x)$  על ידי:
  - ❖ הזזה  $k$  יחידות מעלה.
  - ❖ הזזה  $\frac{p}{m}$  יחידות ימינה.
  - ❖ כיווץ אופקי פי  $m$ .
  - ❖ מתיחה אנכית פי  $a$ .

$h(x) = \frac{1}{f(x)}$	$f(x)$
תחום עליה (ירידה)	תחום עליה (ירידה)
נק' מינימום (מקסימום)	נק' מקסימום (מינימום)
אסימפטוטות אנכיות	נק' אפס / חורים בגובה אפס
נק' אפס / חורים בגובה אפס	אסימפטוטות אנכיות
שאיפה לאינסוף / מינוס אינסוף	אסימפטוטה אופקית $y = 0$
אסימפטוטה אופקית $y = \frac{1}{k}$	אסימפטוטה אופקית $y = k \neq 0$
תחום חיוביות (שליליות)	תחום חיוביות (שליליות)

- פונקציה זוגית:  $f(-x) = f(x)$   
פונקציה שסימטרית ביחס לציר ה- $y$ .
- פונקציה אי זוגית:  $f(-x) = -f(x)$   
פונקציה שערכיה בתחום  $0 \leq x$  משוקפים הן ביחס לציר ה- $y$  והן ביחס לציר ה- $x$ .
- מתקיים:  
אם פונקציה היא זוגית,  
אז פונקציית הנגזרת הראשונה שלה תהיה אי זוגית.  
והפך:  
אם הפונקציה אי זוגית,  
אז פונקציית הנגזרת הראשונה שלה תהיה זוגית.
- יישומון גיאוגברה הממחיש הזזות, מתיחות ומניפולציות נוספות על

פונקציה: GeoGebra

**תודה!**